

入学試験問題

数学 (B)

前

(配点 120 点)

平成 11 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
- 2 この問題冊子は 20 ページある。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所を見いだした場合には手をあげて監督者にすみやかに申し出よ。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用せよ。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されるが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答せよ。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（第 1 面 2 箇所、第 2 面 1 箇所）、科類、氏名を記入せよ。指定欄以外にこれらを記入してはならない。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入せよ。記入箇所を誤った解答は、その解答に限り無効である。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはならない。また、解答用紙の欄外の余白には、何もしるしてはならない。これらに違反した答案は、無効とする。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはならない。
- 9 解答用紙および問題冊子は、持ち帰ってはならない。

受験番号						
------	--	--	--	--	--	--

上欄に受験番号を記入せよ。

第 1 問

- (1) 一般角 θ に対して $\sin \theta$, $\cos \theta$ の定義を述べよ。
- (2) (1)で述べた定義にもとづき, 一般角 α , β に対して

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

を証明せよ。

第 2 問

複素数 $z_n (n = 1, 2, \dots)$ を

$$z_1 = 1, \quad z_{n+1} = (3 + 4i)z_n + 1$$

によって定める。ただし i は虚数単位である。

(1) すべての自然数 n について

$$\frac{3 \times 5^{n-1}}{4} < |z_n| < \frac{5^n}{4}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 実数 $r > 0$ に対して、 $|z_n| \leq r$ を満たす z_n の個数を $f(r)$ とおく。このとき、

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f(r)}{\log r}$$

を求めよ。

第 4 問

xyz 空間において xy 平面上に円板 A があり xz 平面上に円板 B があって以下の 2 条件を満たしているものとする。

- (a) A, B は原点からの距離が 1 以下の領域に含まれる。
- (b) A, B は一点 P のみを共有し、 P はそれぞれの円周上にある。

このような円板 A と B の半径の和の最大値を求めよ。ただし、円板とは円の内部と円周をあわせたものを意味する。

第 5 問

- (1) k を自然数とする。 m を $m = 2^k$ とおくとき, $0 < n < m$ を満たすすべての整数 n について, 二項係数 ${}_m C_n$ は偶数であることを示せ。
- (2) 以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ。

条件: $0 \leq n \leq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 ${}_m C_n$ は奇数である。

第 6 問

$\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x \, dx > 8$ であることを示せ。ただし、 $\pi = 3.14\cdots$ は円周率、 $e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。