

第 1 問

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 $ABCD$ の各辺の長さは、 $AB = \sqrt{3}$, $AC = AD = BC = BD = CD = 2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

第 2 問

時刻 0 に原点を出発した 2 点 A, B が xy 平面上を動く。点 A の時刻 t での座標は $(t^2, 0)$ で与えられる。点 B は、最初は y 軸上を y 座標が増加する方向に一定の速さ 1 で動くが、点 C $(0, 3)$ に到達した後は、その点から x 軸に平行な直線上を x 座標が増加する方向に同じ速さ 1 で動く。

$t > 0$ のとき、三角形 ABC の面積を $S(t)$ とおく。

(1) 関数

$$S(t) \quad (t > 0)$$

のグラフの概形を描け。

(2) u を正の実数とすると、 $0 < t \leq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく。関数

$$M(u) \quad (u > 0)$$

のグラフの概形を描け。

第 3 問

コインを投げる試行の結果によって、数直線上にある 2 点 A , B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは、 A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは、 A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは、 A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは、 B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A , B は原点にあるものとし、上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果、 A , B の到達した点の座標をそれぞれ a , b とする。

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち、 $a = b$ となる場合の数を X_n とおく。 X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2) X_n を求めよ。

第 4 問

白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても、次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ。

その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと、残りは白石と黒石が同数となる。ただし、碁石が一つも残らない場合も同数とみなす。