

第 1 問

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 $ABCD$ の各辺の長さは、 $AB = \sqrt{3}$, $AC = AD = BC = BD = CD = 2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

第 2 問

次の等式を満たす関数 $f(x)$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) がただ一つ定まるための実数 a, b の条件を求めよ。また、そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x+y)f(y)dy + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y)dy \\ + \sin x + \cos x$$

ただし、 $f(x)$ は区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続な関数とする。

第 3 問

実数 $t > 1$ に対し, xy 平面上の点

$$O(0, 0), P(1, 1), Q(t, \frac{1}{t})$$

を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし, 線分 OP , OQ と双曲線 $xy = 1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき

$$c(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと, 関数 $c(t)$ は $t > 1$ においてつねに減少することを示せ。

第 4 問

複素数平面上の点 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = i, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく。ただし、 i は虚数単位である。

(1) 3点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2) すべての点 b_n ($n = 1, 2, \dots$) は円 C の周上にあることを示せ。

第 5 問

容量 1 リットルの m 個のビーカー（ガラス容器）に水が入っている。 $m \geq 4$ から空のビーカーは無い。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり、その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。

このとき、水の入っているビーカーが 2 個になるまで、次の(a)から(c)までの操作を、順に繰り返す行う。

- (a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ。
- (b) さらに、残りのビーカーの中から、入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ。
- (c) 次に、(a)で選んだビーカーの水を(b)で選んだビーカーにすべて移し、空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で、入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは、そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする。

- (1) $x < \frac{1}{3}$ のとき、最初に x リットルの水の入っていたビーカーは、操作の途中で空になって取り除かれるか、または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。
- (2) $x > \frac{2}{5}$ のとき、最初に x リットルの水の入っていたビーカーは、最後まで x リットルの水が入ったままに残ることを証明せよ。

第 6 問

コインを投げる試行の結果によって、数直線上にある 2 点 A , B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは、 A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは、 A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは、 A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは、 B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A , B は原点にあるものとし、上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果、 A , B の到達した点の座標をそれぞれ a , b とする。

- (1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち、 $a = b$ となる場合の数を X_n とおく。 X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。
- (2) X_n を求めよ。
- (3) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。