第　1　問

2つの放物線

$$y = 2\sqrt{3}\,(x - \cos\theta)^2 + \sin\theta$$
$$y = -2\sqrt{3}\,(x + \cos\theta)^2 - \sin\theta$$

が相異なる2点で交わるような θ の範囲を求めよ。

ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする。

第　2　問

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを

$$a_n x + b_n$$

とおく。

(1)　数列 a_n，b_n，$n=1, 2, 3, \cdots$，は

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ。

(2)　$n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，a_n，b_n は共に正の整数で，互いに素であることを証明せよ。

第　3　問

2つの関数

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$
$$g(x) = px^3 + qx^2 + rx$$

が次の5つの条件を満たしているとする。

$$f'(0) = g'(0), \quad f(-1) = -1, \quad f'(-1) = 0,$$
$$g(1) = 3, \quad g'(1) = 0$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$の導関数をそれぞれ$f'(x)$，$g'(x)$で表している。

このような関数のうちで，定積分

$$\int_{-1}^{0} \{f''(x)\}^2 dx + \int_{0}^{1} \{g''(x)\}^2 dx$$

の値を最小にするような$f(x)$と$g(x)$を求めよ。

ただし，$f''(x)$，$g''(x)$はそれぞれ$f'(x)$，$g'(x)$の導関数を表す。

第　4　問

円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意の順序に並べる。これらの点により，円周は $m+n$ 個の弧に分けられる。このとき，これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ。ただし，$m \geqq 1$，$n \geqq 1$ であるとする。