

第1問

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=-1 \\ a+b+c=1 \\ 2a+b \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b=1 \\ a \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

このとき、

$$(B) \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ を満たす全ての } x \text{ に対し、}$$

$$ax^2+x-a \leq 3x^2-1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ を満たす全ての } x \text{ に対し、}$$

$$(3-a)x^2-x+a-1 \geq 0$$

となる。この不等式の左辺は、

$$3-a \geq 3 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

より、下に凸の放物線となり、その対称軸について

$$0 < \frac{1}{2(3-a)} \leq 1$$

なので、 $-1 \leq x \leq 1$ においてはその頂点で最小値を取ることが分かる。

よって、(B)はさらに

$$\text{最小値 } -a-1 - \frac{1}{4(3-a)} \geq 0$$

と同値である。

$$4(3-a)(a-1)-1 \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2-16a+13 \geq 0 \Leftrightarrow 2-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{5}{2}$$

これが、 a の取りうる値の範囲である。

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (2ax+1)^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 (4a^2x^2+4ax+1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (4ax^2+1) dx \\ &= \frac{8}{3}a^2+2 \end{aligned}$$

なので、 I の取りうる値の範囲は、

$$\frac{19}{4} - 2\sqrt{3} \leq a^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{44-16\sqrt{3}}{3} \leq \frac{8}{3}a^2+2 \leq \frac{56}{3}$$

より、

$$\frac{44-16\sqrt{3}}{3} \leq I \leq \frac{56}{3}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{44-16\sqrt{3}}{3} \leq I \leq \frac{56}{3}$$

第2問

$$x+y=k$$

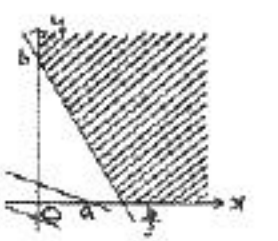
と置けば、

$$y=-x+k$$

なる傾きが -1 に固定された平行直線群を考える。

領域 D としては、

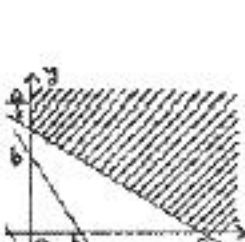
$$(i) \quad \begin{cases} 0 \leq \frac{b}{3} \leq a \\ 0 \leq \frac{a}{3} \leq b \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{3} \leq b \leq 3a \quad \text{のとき}$$



このとき、最小値は図中のAを通るときで、

$$\frac{3b-a}{8} + \frac{3a-b}{8} = \frac{a+b}{4}$$

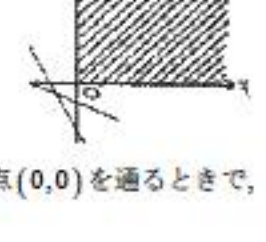
$$(ii) \quad \begin{cases} a \leq \frac{b}{3} \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a \leq b \\ b \geq 0 \end{cases} \quad \text{のとき}$$



このとき、最小値は点 $\left(\frac{b}{3}, 0\right)$ を通るときで、

$$\frac{b}{3}$$

$$(iii) \quad \begin{cases} b \leq \frac{a}{3} \\ a \geq 0 \end{cases} \quad \text{のとき}$$



このとき、最小値は点 $\left(0, \frac{a}{3}\right)$ を通るときで、

$$\frac{a}{3}$$

$$(iv) \quad \begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \quad \text{のとき}$$



このとき、最小値は点 $(0,0)$ を通るときで、

$$0$$

以上より最小値は、

$$\begin{aligned} &\frac{a+b}{4} \quad \left(\frac{a}{3} \leq b \leq 3a \right) \\ &\frac{b}{3} \quad (3a \leq b, b \geq 0) \\ &\frac{a}{3} \quad \left(b \leq \frac{a}{3}, a \geq 0 \right) \\ &0 \quad (a \leq 0, b \leq 0) \end{aligned}$$

(答)

$$\begin{aligned} &\frac{a+b}{4} \quad \left(\frac{a}{3} \leq b \leq 3a \right) \\ &\frac{b}{3} \quad (3a \leq b, b \geq 0) \\ &\frac{a}{3} \quad \left(b \leq \frac{a}{3}, a \geq 0 \right) \\ &0 \quad (a \leq 0, b \leq 0) \end{aligned}$$

第3問

(1)

$$\alpha=2+\sqrt{3}, \quad \beta=2-\sqrt{3}$$

であり、

$$\begin{cases} S_1 = \alpha + \beta = 4 \\ S_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (4\alpha-1) + (4\beta-1) = 4S_1 - 2 = 14 \\ S_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (4\alpha^2-\alpha) + (4\beta^2-\beta) = 4S_2 - S_1 = 52 \end{cases}$$

$n \geq 3$ のとき、

$$\begin{cases} \alpha^2 = 4\alpha-1 \Leftrightarrow \alpha^n = 4\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} \\ \beta^2 = 4\beta-1 \Leftrightarrow \beta^n = 4\beta^{n-1} - \beta^{n-2} \end{cases}$$

より、

$$\alpha^n + \beta^n = 4(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) \Leftrightarrow S_n = 4S_{n-1} - S_{n-2}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad S_1=4, \quad S_2=14, \quad S_3=52, \quad S_4=4S_{n-1}-S_{n-2}$$

(2)

S_1, S_2 はともに整数であり、(1)で得た漸化式が整数係数なので、帰納的に整数と分かる。一方、

$$S_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n > 0$$

であることは明らかなので、 S_n は正の整数である。よって、

$$\begin{cases} S_1 = 4S_2 - S_3 \equiv 4 \cdot 2 - 4 = 4 \pmod{10} \\ S_2 = 4S_3 - S_4 \equiv 4 \cdot 4 - 2 = 4 \pmod{10} \\ S_3 = 4S_4 - S_5 \equiv 4 \cdot 4 - 2 = 4 \pmod{10} \end{cases}$$

となるので、以後もこれの繰り返しが起こり、

$$S_n \text{の1の位の数は} \begin{cases} 4 & (n=3k+1, 3k+2) \\ 2 & (n=3k) \end{cases} \quad (k \text{は0以上の整数})$$

となる。よって、 S_{2003} の1の位の数は4である。

(答) 4

(3)

$$0 < \beta = 2-\sqrt{3} < 1 \Rightarrow 0 < \beta^n = (2-\sqrt{3})^n < 1$$

であることから、

$$\alpha^{2003} = S_{2003} - \beta^{2003}$$

について、

$$S_{2003} - 1 < \alpha^{2003} < S_{2003}$$

が成り立つ。(2)で S_{2003} の1の位の数は4と分かったので、

α^{2003} 以下の最大の整数 $S_{2003}-1$ の1の位の数は3である。

(答) 3

第4問

(1)

X_1 の値は、出た目が1ならば、

$$X_1=0$$

であり、その確率は

$$\frac{1}{6}$$

である。出た目が2または4ならば、

$$X_1=1$$

であり、その確率は

$$\frac{1}{3}$$

である。出た目が3または5ならば

$$X_1=2$$

であり、その確率は

$$\frac{1}{3}$$

である。出た目が6ならば

$$X_1=5$$

であり、その確率は

$$\frac{1}{6}$$

となる。各々の X_1 に対して X_2 の値は、 $X_1=0$ のとき、

$$X_2=0$$

であり、その確率は

$$1$$

である。 $X_1=1$ のとき、出た目が1ならば

$$X_2=0$$

であり、その確率は

$$\frac{1}{6}$$

である。出た目が1以外ならば

$$X_2=1$$

であり、その確率は

$$\frac{5}{6}$$

である。 $X_1=2$ のとき、出た目が1または2ならば

$$X_2=0$$

であり、その確率は

$$\frac{1}{3}$$

である。出た目が3以上ならば

$$X_2=2$$

であり、その確率は

$$\frac{2}{3}$$

である。 $X_1=5$ のとき、出た目が1または5ならば

$$X_2=0$$

であり、その確率は

$$\frac{1}{3}$$

である。出た目が2または4ならば

$$X_2=1$$

であり、その確率は

$$\frac{1}{3}$$

である。出た目が3,6ならば、それぞれ

$$X_2=2, \quad X_2=5$$

であり、その確率はともに

$$\frac{1}{6}$$

である。このように決まっていき、このことから、 X_n の値としては

$$0, 1, 2, 5$$

の4通りに限られること、

$$X_n \geq X_{n+1}$$

であることが分かり、 X_2 に対しての X_1 の値の決まり方も同様の考察を繰り返せばよいことになる。

$X_1=0$ になるための $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$ の変化は、

$$(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 0, 0), (2, 2, 0), (5, 0, 0), (5, 1, 0), (5, 2, 0), (5, 5, 0)$$

である。それぞれの確率を求め、期待値を計算すると、

$$\frac{18+6+5+12+8+6+1+1}{108} + \frac{29}{54}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{29}{54}$$

(2)

$X_n=5$ となるのは、 $X_n \geq X_{n+1}$ であったことから、

$$X_1=X_2=\cdots=X_n=5$$

のときであり、 $X_k=5 \quad (k=1, 2, \dots, n)$ となる確率は $\frac{1}{6^n}$ なので、求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(3)

$X_n=1$ となるのは、 $X_n=0 \Rightarrow X_{n+1}=0$ であることと、 $X_n=2 \Rightarrow X_{n+1}=0, 2$

であることから、

$$X_1=X_2=\cdots=X_n=1$$

または

$$X_1=X_2=\cdots=X_i=5, \quad X_{i+1}=\cdots=X_n=1 \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

であり、後者で $i=0$ とすれば

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

となるので、求める確率は

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i-1} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-i} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5}\right)^i$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{5^n - 1}{2 \cdot 6^n}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{5^n - 1}{2 \cdot 6^n}$$