第1問

(A) $\begin{cases} 2a-b=c-1 \\ a-b=c+1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=c+2 \\ b=1 \end{cases}$

これより、

(B) $\cos x = 2\cos^2 3x - 1$ かつ $-1 \leqq \cos x \leqq 1$

$\iff (3-2)3x^2 - x + 0 - 1 \geqq 0$ かつ $-1 \leqq \cos x \leqq 1$

すなわち、x は $x^2 - x - 1 \geqq 0$

$$\begin{cases} (3-a)^2 + 4a - 1 = 3^2 \\ (3-a)^2 - 1 + 2a - 1 = 1^2 \end{cases} \cdots\cdots (*)$$

が成立するように、$3-a \leqq 0$ $\iff a \geqq 3$ のもとで、

$(*)$ $\iff \begin{cases} a^2 - 2a - 1 = 9 \\ a^2 - 2a - 1 = 1 \end{cases}$

$a^2 - 2a - 1 = 9$ のもとで $a^2 - 2a - 1 = 1$ は成り立たない。

$a^2 - 2a - 1 = 1$ のもとで $a^2 - 2a - 1 = 9$ は $a = 1 \pm \sqrt{11}$ のもとで成り立つ。

$a \geqq 3$ より $a = 1 + \sqrt{11}$

(-1,3) (1,1)

-1≦x≦1を満たす範囲

下の図のように、$x = \frac{1}{2(3-a)}$ のもとで $\sin x = \frac{1}{2(3-a)}$ (>0)

であり、$\sin x$ が $\frac{1}{2}$ 以上となるためには、

$\frac{1}{2(3-a)} \geqq \frac{1}{2}$ $\iff$ $\frac{1}{3} \geqq a$ $\iff$ $a \leqq \frac{1}{3}$

すなわち矛盾。$\sin x$ は $\frac{1}{2}$ 以上 $\sin x$ は $\frac{1}{2}$ 以下

$0 < \frac{1}{2(3-a)} < 1$ $\iff$ $0 < a < \frac{1}{3}$ とわかる。

(-1,3) (1,1)

逆に a が $0 < a < \frac{1}{3}$ のもとでは(B)の

$x = \frac{1}{2(3-a)}$ のもとでこれらの

$a - 1 - \frac{1}{2(3-a)} \geqq 0$ $\iff$ $(a-1)(2(3-a)-1) \geqq 0$

$\iff (a-1)(5-2a) \geqq 0$ $\iff$ $(1 \geqq a \geqq 5/2)$

$\iff a(a-1)(a-4) + 1 \geqq 0$, $0 < a < \frac{1}{3}$

$\iff 2 - \frac{5}{3} \leqq a < \frac{1}{3}$

が成立するためには $a \geqq 2 - \frac{5}{3}$ で十分。

ここで、$I = \int_{-1}^{1} (2x^2 + x)^2 dx = 2\int_0^1 (2x^4 + x^2) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}$

であって、$a \geqq 2 - \frac{5}{3}$ $\iff$ $a \geqq \frac{1}{3} - 2 + \frac{5}{3}$ なので、

$\frac{2}{5} + \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{10}{3} = \frac{2}{5} - \frac{4}{3} = \frac{-14}{15}$

だから、$I \geqq \underline{\frac{-14}{15}}$ である。

第2問

$x^2 + y^2 = \frac{4(x-3)}{(x-3)^2 - y^2} = \frac{4(x-3)}{(x-3)^2 - (\frac{7x}{y})^2}$

$= \frac{4(x-3)\{(x-3)^2 - \frac{7x}{y}\}}{(x-3)^2 - y^2}$

$\iff x = \frac{4(x-3)\{(x-3)^2 - \frac{7x}{y}\}}{2x^2 - 14x + 49}$ $\iff y = \frac{7x}{y-x}$

すつまりこれらの値のとり方は $x \neq 7$ としてよい

$\frac{x}{y} = \frac{7}{y-x} + 1 = \frac{7}{y-x}$ $\iff I = \frac{7y}{y-x}$

$Y = \frac{4(x-3)}{(x-3)^2 - x^2} = \frac{4(x-3)(y-x)}{2x^2 - 6x} = \frac{2y(y-x)}{x} = \frac{2y}{\frac{x}{y-x}}$

$= \frac{2(3x+4y-y^2)}{x^2+y^2} = \frac{2y}{\frac{x}{y-x}}$ $\iff$ $x^2 + y^2 = 6x + 8y$

$I = 3 \iff (x, y) = (0, 0)$ または $(6, 8)$ のいずれかである。

ここで、$I = \frac{7y}{y-x}$ $\iff$ $y(x-y) < 0$ なので、

$P(x, y)$ は右図のA,B以外の

上の点である。

(2) 円周角の性質から、

$\angle APB = \angle AOB$

$= \underline{45°}$

である。

(3) $O(0,0)$ を原点とし、x 軸上に点 P_0 を定めれば、$x^2 + y^2 = 6x - 8y$ $\iff$ $(x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{4}{2})^2 = \frac{25}{4}$ $\iff$ $(x - \frac{3}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{25}{4}$

$\iff (x-6)^2 + y^2 = 0$ $\iff$ $P_0(6, 0)$

よって、求めるものは $I = \frac{7y}{y-x}$ に P_0 を代入すればよく

$I = \frac{7 \times 0}{0 - 6} = \underline{0}$

第3問

(1) A, B, A' がそれぞれ t 分後 $(0 \leqq t \leqq 10)$ のとき、

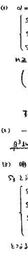
A は $(0, 0, 2)$ にあり、

B は $(0, 0, 7)$ にあり、

A' は $(t, 0, 2)$ にあり、

B' は $(0, 0, 7)$ にあり、

これら4点は $(0, 0, 0)$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の球面上にあるとなる。



すなわち、

$S(t) = \theta \times (2\sqrt{2}\theta)^2 + 2\left\{\frac{\pi - 2\theta}{2} - \frac{\sin(\pi - 2\theta)}{2}\right\}$

$= 8\theta(\pi - 2\theta + \pi - 2\theta - \sin 2\theta)$

である。

(2) $\int_0^{\pi/2} S(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (8\pi\theta - 16\theta^2 + \pi - 2\theta - \sin 2\theta)\sin\theta\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \{8\theta(1 + \cos 2\theta) + \pi - 2\theta - \sin 2\theta\}\sin\theta\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \{8\theta\cos^2\theta\sin\theta + \pi\sin\theta - \pi\cos\theta\}\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \{(8\cos^2\theta\sin\theta) - 8\cos\theta\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \pi\sin\theta\}\, d\theta$

$= \left[-\frac{8}{3}\cos^3\theta + \frac{4}{3}\cos^2\theta + \pi\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$

$= \left[-\frac{8}{3}\cos^3\theta + \frac{4}{3}\cos^2\theta + \pi\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$

$= \pi - 2\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} 3\cos\theta\sin\theta\, d\theta\right)$

$= \pi - \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left[3\cos^2\theta + \frac{\cos 2\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}$

$= \pi - \frac{4}{3} - \frac{4}{3}(3 - \frac{1}{3}) = \pi - \frac{4}{3} - \frac{4}{9}$

$= \underline{\pi - \frac{16}{9}}$

第4問

(1) $\alpha = 2 + i$, $\beta = 2 - i$ とする。

$$\begin{cases} S_1 = \alpha + \beta = 4 \\ S_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2(\alpha\beta) = 4^2 - 2 \times 10 \\ S_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta) = 4^2 \times 4 = 76 \end{cases}$$

が成り立つ。

$$\begin{cases} \alpha^n + \alpha^{n-1} \iff \alpha^n = \alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} \\ \beta^n + \beta^{n-1} \iff \beta^n = \beta^{n-1} - \beta^{n-2} \\ \iff \alpha^n + \beta^n = (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) \end{cases}$$

すなわち、$\underline{S_n = S_{n-1} + S_{n-2}}$ である。

(2) $-1 < \beta = 2 - i < 0$ つまり $-1 < \beta^{100} < 0$ である。

$\underline{\beta^{100}}$ に小数点第2位は $\underline{-1}$ である。

(3) 明らかに $S_n \geqq 1$ で S_n は整数である。(1)ですでに S_1, S_2, S_3 は3桁だけである。

$$\begin{cases} S_1 = 4 \\ S_2 = 4 \times 4 - 6 = 10 \\ S_3 = 4 \times 10 + 6 = 46 \\ S_4 = 4 \times 46 + 10 = 194 \\ S_5 = 4 \times 194 + 46 = 822 \\ S_6 = 4 \times 822 + 194 = 3482 \end{cases} \begin{cases} \equiv 4 \pmod 4 \\ \equiv 2 \pmod 4 \\ \equiv 2 \pmod 4 \\ \equiv 2 \pmod 4 \\ \equiv 2 \pmod 4 \\ \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

ゆえに $S_n \equiv 2 \pmod 4$ $(n \geqq 2)$ である。

$S_{100} = 1 + 2\sum_{k=1}^{99} \beta^k$ は整数であり、(1)ですでに $-1 < \beta^{100} < 0$ より

$S_{100} < 0$ $\iff$ $S_{100} = \beta^{100} < S_{100} + 1$

よって、$\underline{S^{100}}$ の下一桁は $S_{100} + 1 = 1$ 桁目 $\underline{6}$ である。

第5問

(1) x_n が下一桁目が $0, 1, 4, 5, 6$ のいずれかであるとき x_{n+1} の下一桁目もこれらのいずれかであるから、x_n が2桁目は $\underline{1 - (\frac{1}{5})^2}$ である。

(2) x_n が4で割り切れないとき

x_n の下一桁目が奇数の時 $\cdots\cdots (\frac{1}{5})^n$

また、偶数の時 x_n の下一桁目が $2, 6$ であるとき x_n は $(n-1)$ 回目に 4 で割り切れる

$\cdots\cdots 4C_1 \times \frac{1}{5} \times (\frac{1}{5})^{n-1}$

よって、求める確率は $\underline{\frac{1}{5}(\frac{1}{5})^n - \frac{4}{5}(\frac{1}{5})^{n-1}}$

(3) $x_n \equiv 0 \pmod{20}$

$\iff x_n \equiv 0 \pmod 5$ かつ $x_n \equiv 0 \pmod 4$

$\iff x_n \equiv 0 \pmod 5$ かつ $x_n \equiv 0 \pmod 4$ ＋条件

$x_n \equiv 0 \pmod 5$ $\iff$ $x_n \equiv 0 \pmod 4$ ＋条件

$\begin{cases} \text{1回目も } 4 \text{ で割り切れず} \\ \text{偶数の時 } n-1 \text{ 回目は } 4 \text{ で割り切れる} \end{cases}$

であり、$x_n \equiv 0 \pmod 5$ かつ $x_n \equiv 0 \pmod 4$ ＋条件 $= 1 - P_n$ である。

$(\frac{1}{5})^n + (\frac{4}{5})^n = \frac{1}{5}(\frac{1}{5})^{n-1} + (\frac{1}{5})^n - \frac{4}{5}(\frac{1}{5})^{n-1}$

$= (\frac{1}{5})^n + (\frac{1}{5})^{n-1} - \frac{3}{5}(\frac{1}{5})^{n-1} - (\frac{1}{5})^n - \frac{4}{5}(\frac{1}{5})^{n-1}$

$= (\frac{1}{5})^n \{1 + (\frac{1}{5}) + \frac{3}{5}(\frac{1}{5}) - (\frac{1}{5}) - 4(\frac{1}{5})\}$

であって、$\lim_{n\to\infty} P_n = 1$ であるから、

$1 \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} + \lim_{n\to\infty} \{1 + (\frac{1}{5}) + \frac{3}{5}(\frac{1}{5}) - (\frac{1}{5}) - 4(\frac{1}{5})\}$

すなわち、$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \lim_{n\to\infty} \{1 + (\frac{1}{5}) + \frac{3}{5}(\frac{1}{5}) - (\frac{1}{5}) - 4(\frac{1}{5})\}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

ところで、$n \to \infty$ とすると $(\frac{1}{5})^n \to 0$, $(\frac{1}{5})^{n-1} \to 0$,

$\frac{3}{5}(\frac{1}{5})^n \to \frac{3}{5} \times \frac{1}{\infty} \to 0$

$4(\frac{1}{5})^n \to \frac{4}{(\frac{1}{5})^n} \to 0$

ゆえに、上の $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \lim_{n\to\infty} \{1 + (\frac{1}{5}) + \frac{3}{5}(\frac{1}{5}) - (\frac{1}{5}) - 4(\frac{1}{5})\}$ は0に等しくなるとわかる。

よって、$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \lim_{n\to\infty} \{1 + (\frac{1}{5}) + \frac{3}{5}(\frac{1}{5}) - (\frac{1}{5}) - 4(\frac{1}{5})\}$

$= \underline{\frac{1}{25}}$ である。

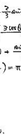
第6問

半径1の円の円周の長さは 2π であり、この円の内接する正12角形の周の長さは $12 \times \sin\pi/6$ だから $12 \times 2\pi \sin\pi/6$ である。

ここで、作図法では

$(\frac{1}{12})^n = 1^n + 1^n - 2 \times 1 \times 1 \times \cos\frac{\pi}{6}$

$= 2 - \sqrt{3}$



$\iff L = 12^n(2 - \sqrt{3}) = 72(4 - 2\sqrt{3})$

$= 72(\sqrt{3} - 1)$

$\iff L = 6\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$

ここで、$\sqrt{3} > 1.41$ より $\sqrt{3} > 1.73$ なので、

$L > 6 \times 1.41 \times 0.73 = 6.1752 > 6.1$

が成立する。

よって、$2\pi > 6.1$ $\iff$ $\pi > 3.05$ が成立する