

入学試験問題



数学 (A)

(配点 80 点)

平成 16 年 2 月 25 日 14 時—15 時 40 分

注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 14 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 解答用紙の指定欄に、受験番号(第 1 面 2 箇所、第 2 面 1 箇所)、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 5 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。記入箇所を誤った解答は、その解答に限り無効とします。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。これらに違反した答案は、無効とします。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使ってもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 解答用紙および問題冊子は、持ち帰ってはいけません。

受験番号						
------	--	--	--	--	--	--

上欄に受験番号を記入しなさい。

第 1 問

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P , Q , R が次の条件をみたしている。

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり、点 P , Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき、 a の値を求めよ。

第 2 問

a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時にみたす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$y \geq x^2$$

$$y \leq -2x^2 + 3ax + 6a^2$$

領域 D における $x + y$ の最大値、最小値を求めよ。

第 3 問

関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次で定める。

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$g(x) = \{f(x)\}^3 - 3f(x)$$

$$h(x) = \{g(x)\}^3 - 3g(x)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $f(x) = a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $g(x) = 0$ をみたす実数 x の個数を求めよ。
- (3) $h(x) = 0$ をみたす実数 x の個数を求めよ。

第 4 問

片面を白色に、もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ、次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り、出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し、3, 4 であればまん中の板を裏返し、5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば、最初、板の表の色の並び方が「白白白」であったとし、1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば、色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば、色の並び方は「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて、3 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて、 n 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする。

p_{2k+1} (k は自然数) を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

第 1 問

a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件 (A), (B) を満たすとする。

(A) $f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) \leq 6$

(B) $-1 \leq x \leq 1$ を満たすすべての x に対し,

$$f(x) \leq 3x^2 - 1$$

このとき, 積分 $I = \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

第 2 問

a, b を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$x + 3y \geq a$$

$$3x + y \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

領域 D における $x + y$ の最小値を求めよ。

第 3 問

2 次方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α , 小さいものを β とする。

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$s_n = \alpha^n + \beta^n$$

とおく。

- (1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また, $n \geq 3$ に対し, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。
- (2) s_n は正の整数であることを示し, s_{2003} の 1 の位の数を求めよ。
- (3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

第 4 問

さいころを振り、出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし、1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り、出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。以下同様にして、 X_n が決まればさいころを振り、出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして、 X_n , $n = 1, 2, \dots$ を定める。

- (1) $X_3 = 0$ となる確率を求めよ。
- (2) 各 n に対し、 $X_n = 5$ となる確率を求めよ。
- (3) 各 n に対し、 $X_n = 1$ となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。