

入学試験問題



数学 (B)

(配点 120 点)

平成 16 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号(第 1 面 2 箇所、第 2 面 1 箇所)、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。記入箇所を誤った解答は、その解答に限り無効とします。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。これらに違反した答案は、無効とします。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙および問題冊子は、持ち帰ってはいけません。

受 験 番 号						
---------	--	--	--	--	--	--

上欄に受験番号を記入しなさい。

第 1 問

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P , Q , R が次の条件をみたしている。

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり、点 P , Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき、 a の値を求めよ。

第 2 問

自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

- (1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し、10 の位の数を a 、1 の位の数を b とおいたとき、 $a + b$ が偶数となるならば、 b は 0 または 4 であることを示せ。
- (2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し、1000 の位の数、100 の位の数、10 の位の数、および 1 の位の数の 4 つすべてが同じ数となるならば、その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。

第 3 問

半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を、円 C に内接させながら、円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の一点を P とする。点 P が、円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は、円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。

第 4 問

関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

$$f_1(x) = x^3 - 3x$$

$$f_2(x) = \{f_1(x)\}^3 - 3f_1(x)$$

$$f_3(x) = \{f_2(x)\}^3 - 3f_2(x)$$

以下同様に、 $n \geq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば、関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x) = \{f_n(x)\}^3 - 3f_n(x)$$

で定める。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $f_1(x) = a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。
- (2) a を実数とする。 $f_2(x) = a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。
- (3) n を 3 以上の自然数とする。 $f_n(x) = 0$ をみたす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。

第 5 問

r を正の実数とする。 xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を A 、点 $P(r, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし、球 A と球 B の和集合とは、球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

- (1) V を r の関数として表し、そのグラフの概形をかけ。
- (2) $V = 8$ となるとき、 r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

注意：円周率 π は $3.14 < \pi < 3.15$ をみたす。

第 6 問

片面を白色に、もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ、次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り、出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し、3, 4 であればまん中の板を裏返し、5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば、最初、板の表の色の並び方が「白白白」であったとし、1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば、色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば、色の並び方は「黒白黒」となる。

- (1) 「白白白」から始めて、3 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。
- (2) 「白白白」から始めて、 n 回の操作の結果、色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

第 1 問

a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件 (A), (B) を満たすとする。

(A) $f(-1) = -1, \quad f(1) = 1$

(B) $-1 \leq x \leq 1$ を満たすすべての x に対し,

$$f(x) \leq 3x^2 - 1$$

このとき, 積分 $I = \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

第 2 問

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A, $7 + 7i$ を表す点を B とする。
ただし, i は虚数単位である。正の実数 t に対し,

$$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$$

を表す点 P をとる。

- (1) $\angle APB$ を求めよ。
- (2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。

第 3 問

xyz 空間において、平面 $z = 0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし、点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐^{すい}を A とする。

次に、平面 $z = 0$ 上の点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を H 、平面 $z = 1$ 上の点 $(1, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。 H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

$0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $z = t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。 $t = 1 - \cos \theta$ のとき、 $S(t)$ を θ で表せ。

(2) C の体積 $\int_0^1 S(t) dt$ を求めよ。

第 4 問

2 次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α , 小さいものを β とする。

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$s_n = \alpha^n + \beta^n$$

とおく。

(1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また, $n \geq 3$ に対し, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) β^3 以下の最大の整数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数をも求めよ。

第 5 問

さいころを n 回振り、第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする。

- (1) X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。
- (2) X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。
- (3) X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n)$$

を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

第 6 問

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。