

第1問

$P(s, s^2)$ とおけば $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}a \right)$ なので,

$Q\left(s + \frac{a}{\sqrt{3}}, s^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}a\right)$ となって, これも $y = x^2$ にあるので

$$s^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}a = \left(s + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = s^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}sa + \frac{a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}s = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{a}{3} \Leftrightarrow s = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

R は P のまわりに Q を 60° 回転した点となる。 -60° 回転の状況は右図となって, R も $y = x^2$ の上にあることはない。

R を表す複素数を $X + Yi$ とすれば,

$$X + Yi = (s + s^2i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times a \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)$$

$$= a \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + a \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{2}\right)i$$

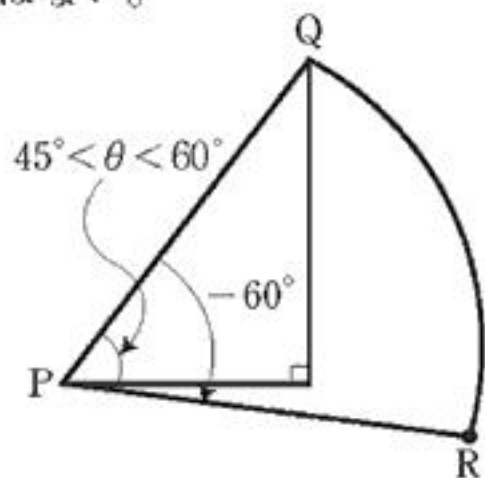
$$\Rightarrow \begin{cases} X = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a + s = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-a) \\ Y = \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{2}\right)a + s^2 = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{12} \end{cases}$$

R も $y = x^2$ の上にあるから,

$$\frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{12} = \frac{1}{2}(1 - 2a + a^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{12}a^2 - \frac{3}{2}a = \frac{5}{12}a \left(a - \frac{18}{5}\right) = 0$$

$a > 0$ なので, 求める a は $\frac{18}{5}$ である。



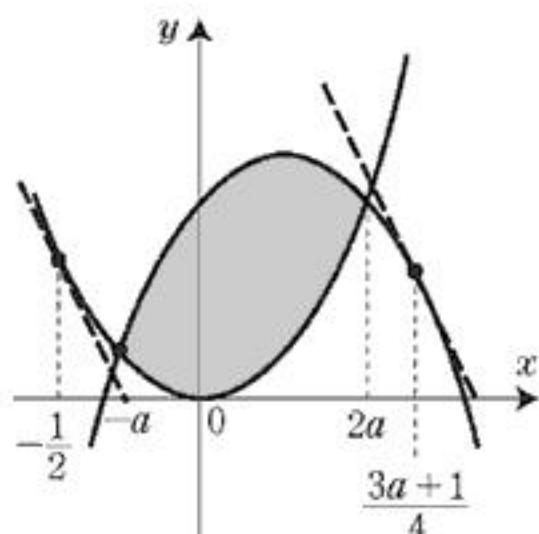
第2問

2 曲線 $y = x^2$ と $y = -2x^2 + 3ax + 6a^2$ の交点は,
 $3x^2 - 3ax - 6a^2 = 3(x + a)(x - 2a) = 0 \Rightarrow (-a, a^2), (2a, 4a^2)$
 であり, 2 曲線それぞれの接線で傾きが -1 であるものが引ける接点
 の x 座標は
$$\begin{cases} 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \\ -4x + 3a = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3a+1}{4} \end{cases}$$

2 交点の x 座標と 2 接点の x 座標の大小で場合分けすれば,

(i) $0 < a \leq \frac{1}{5}$ のとき,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < -a \\ 2a \leq \frac{3a+1}{4} \end{cases} \quad \text{なので右図を得る。}$$



斜線部分に平行直線群 $y = -x + k$ を
 重ねることで;

$$\begin{cases} (x, y) = (2a, 4a^2) \text{ で最大値} = 2a + 4a^2 \\ (x, y) = (-a, a^2) \text{ で最小値} = -a + a^2 \end{cases}$$

(ii) $\frac{1}{5} < a \leq \frac{1}{2}$ のときには, $-\frac{1}{2} \leq -a$ であり $\frac{3a+1}{4} < 2a$ と

なって, 最小値は $(x, y) = (-a, a^2)$ での $-a + a^2$ と変わらないが,

交点 $(2a, 4a^2)$ と $x = \frac{3a+1}{4}$ の方の接点の位置が(i)と逆になるの

で, 最大値は $y = -2x^2 + 3ax + 6a^2$ に $y = -x + k$ が接するときと
 なり, $-2x^2 + 3ax + 6a^2 = -x + k$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (3a+1)x + k - 6a^2 = 0$$

$$\therefore D = (3a-1)^2 - 8(k-6a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{57a^2 + 6a + 1}{8}$$

(iii) $a > \frac{1}{2}$ のときには, $-a < -\frac{1}{2}$, $\frac{3a+1}{4} < 2a$ なので,

交点 $(-a, a^2)$ と $x = -\frac{1}{2}$ の方の接線の位置が(ii)と逆になるので,

最小値は $y = x^2$ に $y = -x + k$ が接するときとなり,

$$x^2 = -x + k \Leftrightarrow x^2 + x - k = 0$$

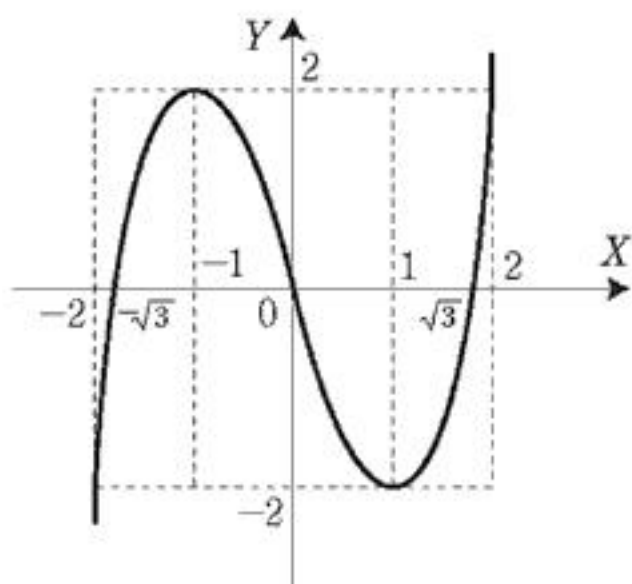
$$\therefore D = 1 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

以上をまとめれば,

	$0 < a \leq \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} < a \leq \frac{1}{2}$	$a > \frac{1}{2}$
最大値	$2a + 4a^2$	$\frac{57a^2 + 6a + 1}{8}$	$\frac{57a^2 + 6a + 1}{8}$
最小値	$-a + a^2$	$-a + a^2$	$-\frac{1}{4}$

第3問

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y = f(x) &= x(x^2 - 3) \\
 &= (x + \sqrt{3})x(x - \sqrt{3}) \\
 f'(x) &= 3x^2 - 3 \\
 &= 3(x+1)(x-1)
 \end{aligned}$$



から、 $y = f(x)$ の概形は右図の
3次曲線と同じである。

よって、 $f(x) = a$ をみたす実数 x の個数は、

$$\begin{cases} |a| < 2 \text{ のとき } 3 \text{ 個} \\ |a| = 2 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\ |a| > 2 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \end{cases}$$

(2) $g(x) = 0 \iff f(x) = -\sqrt{3}$, $f(x) = 0$ または $f(x) = \sqrt{3}$ であり、(1)の a として $-\sqrt{3}$, 0 , $\sqrt{3}$ を考えれば、それぞれについて実数解が3個ずつ対応する。右上図のグラフで X 軸に平行な直線 $Y = -\sqrt{3}$, $Y = 0$, $Y = \sqrt{3}$ を引けば、これら $3 \times 3 = 9$ 個の実数解の中に重複するものがないことが簡単にわかるので、 $g(x) = 0$ をみたす実数 x は 9個 である。

(3) $h(x) = 0 \iff g(x) = -\sqrt{3}$, $g(x) = 0$ または $g(x) = \sqrt{3}$; であり、 $g(x) = \sqrt{3} \iff \{f(x)\}^3 - 3f(x) = \sqrt{3}$ は $f(x)$ の3次方程式として見れば $\sqrt{3} < 2$ なので、(1)から $-2 < f(x) < 2$ の範囲に異なる3実解をもつ。これら3つの値 α_1 , α_2 , α_3 について $f(x) = \alpha_1$, $f(x) = \alpha_2$, $f(x) = \alpha_3$ を考えると、再び(1)により、3個ずつの実数に対応し、これらの間には重複は起こらない。したがって、 $g(x) = -\sqrt{3}$, $g(x) = 0$, $g(x) = \sqrt{3}$ に対して9個ずつ合計27個の実数に対応し、これらの間に重複はない。

すなわち、 $h(x) = 0$ をみたす実数 x は 27個 である。

第4問

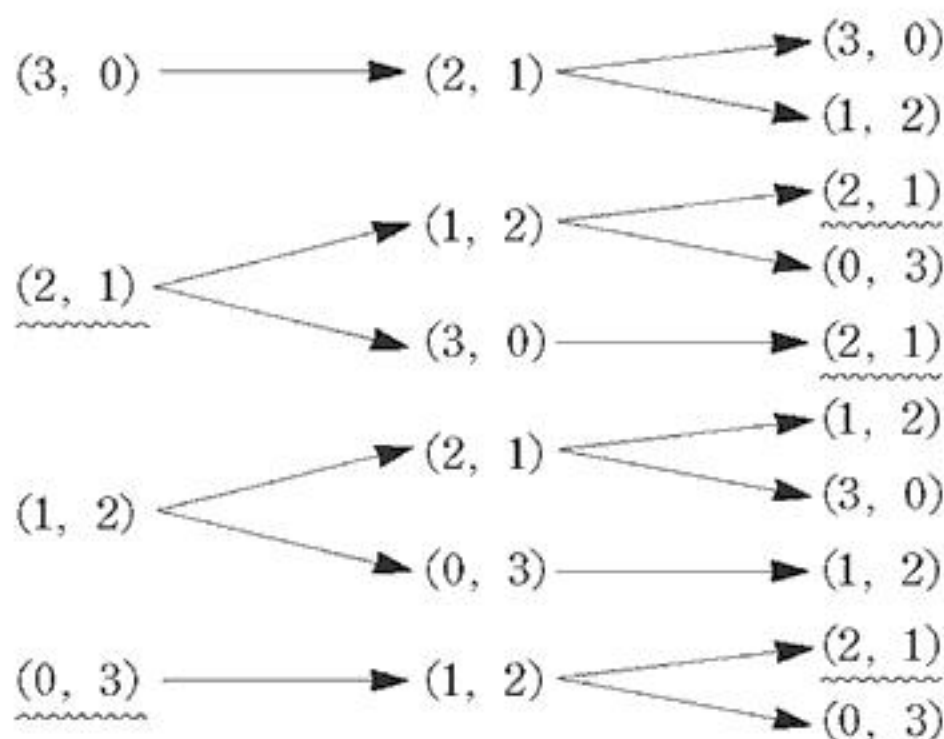
- (1) 白白白の状態から3回の操作で、黒白白になるのは、
左端の白を3回続けて裏返す

または

左端を1回と中央または右端のどちらかを2回裏返す
のいずれかなので、求める確率は

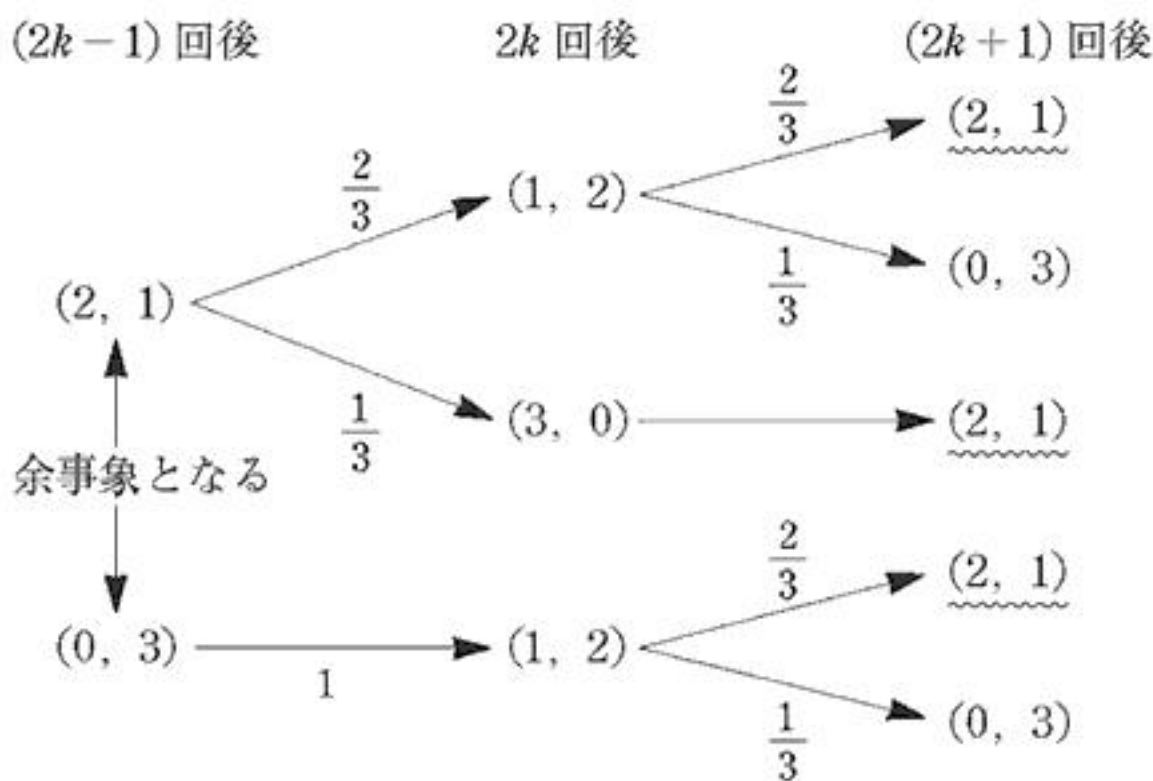
$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_2C_1 \times \frac{3!}{2!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} = \frac{7}{27}$$

- (2) 白の枚数が a 、黒の枚数が b である状態を (a, b) で表す。
求める確率は $(2, 1)$ の状態になる確率である。



連続2回の操作による (a, b) の変化をたどれば、上の樹形図となる。

これを $P_{2k-1} \rightarrow P_{2k} \rightarrow P_{2k+1}$ の流れとしてとらえるとき、1枚のカードについて白から白になるのに要する操作の回数は偶数、白から黒になるのに要する操作の回数は奇数回なので、奇数回の操作の後に $(3, 0)$ と $(1, 2)$ の状態になることはありえないので、樹形図はさらに、



とできる。よって、次の漸化式を得ることになる。

$$\begin{aligned} P_{2k+1} &= P_{2k-1} \times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + (1 - P_{2k-1}) \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{7}{9} P_{2k-1} + \frac{2}{3} (1 - P_{2k-1}) \\ &= \frac{1}{9} P_{2k-1} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P_{2k+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{9} \left(P_{2k-1} - \frac{3}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow P_{2k+1} = \frac{3}{4} + \left(P_3 - \frac{3}{4} \right) \times \left(\frac{1}{9} \right)^{k-1}$$

ここで、 P_3 は(1)を利用すれば、黒白白に白黒白と白白黒の状況を同様に考えることができるので、 $P_3 = 3 \times \frac{7}{27} = \frac{7}{9}$ である。

$$\therefore P_{2k+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{36} \left(\frac{1}{9} \right)^{k-1} = \frac{1}{4} \left\{ 3 + \left(\frac{1}{9} \right)^k \right\}$$