

第1問

$P(s, s^2)$ とおけば $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}a \right)$ なので,

$Q\left(s + \frac{a}{\sqrt{3}}, s^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}a\right)$ となって, これも $y = x^2$ にあるので

$$s^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}a = \left(s + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = s^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}sa + \frac{a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}s = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{a}{3} \Leftrightarrow s = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

R は P のまわりに Q を 60° 回転した点となる。 -60° 回転の状況は右図となって, R も $y = x^2$ の上にあることはない。

R を表す複素数を $X + Yi$ とすれば,

$$X + Yi = (s + s^2i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times a \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i\right)$$

$$= a \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + a \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{2}\right)i$$

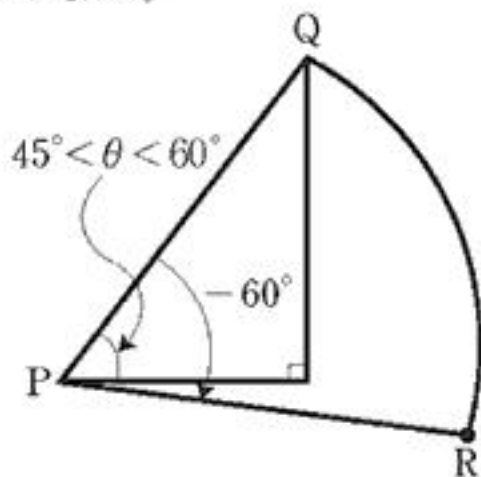
$$\Rightarrow \begin{cases} X = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a + s = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-a) \\ Y = \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{2}\right)a + s^2 = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{12} \end{cases}$$

R も $y = x^2$ の上にあるから,

$$\frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{12} = \frac{1}{2}(1 - 2a + a^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{12}a^2 - \frac{3}{2}a = \frac{5}{12}a \left(a - \frac{18}{5}\right) = 0$$

$a > 0$ なので, 求める a は $\frac{18}{5}$ である。



第2問

- (1) 3桁以上の平方数なので、もとの自然数を

n は 0 以上の整数

$$n \times 100 + p \times 10 + q; p \text{ と } q \text{ は } 0, 1, \dots, 9$$

ただし、 $p=0$ のときは $n \geq 1$

とおけば、これの 2 乗を計算したときの 10 の位と 1 の位の情報を与えるのは $20pq + q^2 = 2pq \times 10 + q^2$ である。

特に、1 の位の情報を与えるのは q^2 のみであって、10 の位については、 $q = 0, 1, 2, 3$ のときには $2pq \times 10$ から与えられる情報のみであり、これは必ず偶数値である。よって、10 の位の数と 1 の位の数との和が偶数値であるならば q^2 自体が偶数でなければならない。すなわち、 $q = 0$ と $q = 2$ のときであり、このときの 1 の位の数 b は 0 または 4 である。

4 以上の q については q^2 が 16, 25, 36, 49, 64, 81 であり、 $2pq \times 10$ からの 10 の位が偶数であったことから、 $q = 8$ のときだけが適することとなり、このときの 1 の位の数 b は 4 である。

よって、3桁以上の平方数の 1 の位の数は 0 または 4 である。

- (2) 題意の平方数の下 4 桁は、(1)の結果より、0000 または 4444 である。よって、下 4 桁が 4444 とはなり得ないことを示せばよい。

平方数 $n \times 10000 + 4444$ が存在したとすると、

$$n \times 10000 + 4444 = 4(n \times 2500 + 1111)$$

$$\Rightarrow n \times 2500 + 1111 \text{ が平方数}$$

であるが、 $n \times 2500 + 1111$ の 10 の位の数と 1 の位の数はともに 1 であって、これらの和は偶数である。よって、(1)の結果に該当するはずであるが、1 の位の数は 0 でも 4 でもない。

したがって、下 4 桁が 4444 はあり得ないことがわかったので題意は示された。

第3問

右図で、大円の弧長 10θ と小円の弧長さ 3φ を比べれば

$$3\varphi = 10\theta \iff \varphi = \frac{10}{3}\theta$$

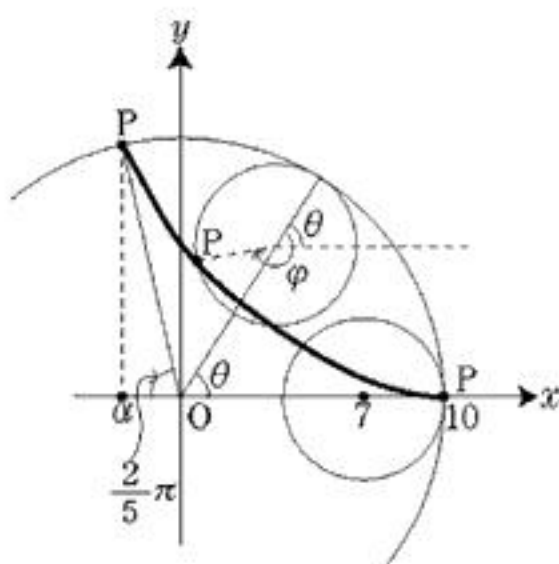
がわかるので、 $P(x, y)$ は

$$x = 7\cos\theta + 3\cos(\theta - \varphi)$$

$$= 7\cos\theta + 3\cos\frac{7}{3}\theta$$

$$y = 7\sin\theta + 3\sin(\theta - \varphi)$$

$$= 7\sin\theta - 3\sin\frac{7}{3}\theta$$



で与えられる。

P が再び大円上に現れる最初は $3 \times 2\pi = 10\theta \iff \theta = \frac{3}{5}\pi$ のときであり、題意の2つの部分とは図中に太線で描いた曲線と大円が囲む2つの部分のことであって、その面積が小さい方の面積は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\pi \times 10^2 + \frac{1}{2} \times 10 \cos \frac{2}{5}\pi \times 10 \sin \frac{2}{5}\pi - \int_x^{10} y dx$$

$$= 30\pi + 25 \sin \frac{4}{5}\pi - \int_{\frac{3}{5}\pi}^0 \left(7\sin\theta - 3\sin\frac{7}{3}\theta \right) \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta$$

ここで、後半の積分は $\frac{dx}{d\theta} = -7\sin\theta - 7\sin\frac{7}{3}\theta$ なので

$$\int_0^{\frac{3}{5}\pi} \left(7\sin\theta - 3\sin\frac{7}{3}\theta \right) \left(7\sin\theta + 7\sin\frac{7}{3}\theta \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{3}{5}\pi} \left(49\sin^2\theta + 28\sin\theta\sin\frac{7}{3}\theta - 21\sin^2\frac{7}{3}\theta \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{3}{5}\pi} \left\{ 49 \times \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 14 \left(\cos \frac{4}{3}\theta - \cos \frac{10}{3}\theta \right) - \frac{21}{2} (1 - \cos \frac{14}{3}\theta) \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{3}{5}\pi} \left(14 - \frac{49}{2} \cos 2\theta + 14 \cos \frac{4}{3}\theta - 14 \cos \frac{10}{3}\theta + \frac{21}{2} \cos \frac{14}{3}\theta \right) d\theta$$

$$= \left[14\theta - \frac{49}{4} \sin 2\theta + \frac{21}{2} \sin \frac{4}{3}\theta - \frac{21}{5} \sin \frac{10}{3}\theta + \frac{9}{4} \sin \frac{14}{3}\theta \right]_0^{\frac{3}{5}\pi}$$

$$= \frac{42}{5}\pi - \frac{49}{4} \sin \frac{6}{5}\pi + \frac{21}{2} \sin \frac{4}{5}\pi - \frac{21}{5} \sin 2\pi + \frac{9}{4} \sin \frac{14}{5}\pi$$

$$= \frac{42}{5}\pi + \frac{49}{4} \sin \frac{\pi}{5} + \frac{21}{2} \sin \frac{\pi}{5} + \frac{9}{4} \sin \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{42}{5}\pi + 25 \sin \frac{\pi}{5}$$

とできる。

よって、小さい方の面積は

$$30\pi + 25 \sin \frac{\pi}{5} - \left(\frac{42}{5}\pi + 25 \sin \frac{\pi}{5} \right)$$

$$= \left(30 - \frac{42}{5} \right) \pi = \frac{108}{5} \pi$$

したがって、2つの部分の面積は

$$\frac{108}{5}\pi \text{ と } \left(100 - \frac{108}{5} \right) \pi = \frac{392}{5}\pi$$

第4問

- (1) $y = f_1(x) = x^3 - 3x$ ($f_1'(x) = 3(x+1)(x-1)$) のグラフと x 軸に平行な直線 $y = a$ との関係から、

$|a| < 2$ のとき 3 個, $|a| = 2$ のとき 2 個, $|a| > 2$ のとき 1 個

- (2) $f_2(x) = f_1(f_1(x)) = a$ をみたす $f_1(x)$ の値は;

- (i) $|a| < 2$ のとき 3 個であり、

これらの $f_1(x)$ の値は互いに異なり、 $-2 < f_1(x) < 2$ にある。

よって、(1)の結果とあわせれば、

$f_2(x) = a$ をみたす x の値は、

$|a| < 2$ のとき 9 個

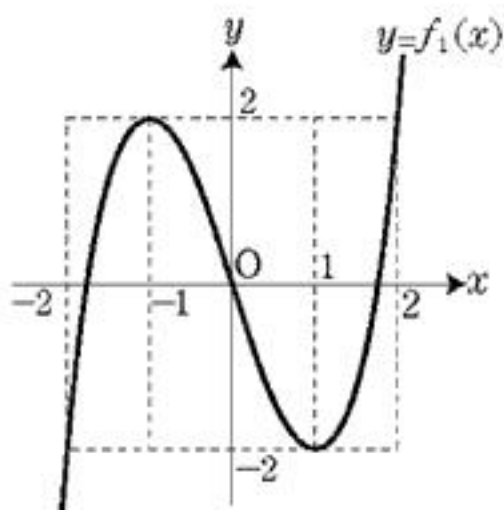
- (ii) $|a| = 2$ のときには、 $f_1(x) = 1, -2$ または $f_1(x) = -1, 2$ であって、これをみたす x の値は(1)の結果からそれぞれ 5 個存在する。

- (iii) $|a| > 2$ のときには $f_1(f_1(x)) = a$ をみたす $f_1(x)$ の値は、

$f_1(x) > 2$ または $f_1(x) < -2$ に 1 個だけ存在し、(1)の結果を再びあわせると $f_2(x) = a$ をみたす x の値は 1 個しか存在しない。

以上から、 $f_2(x) = a$ をみたす実数 x の個数は、

$|a| < 2$ のとき 9 個, $|a| = 2$ のとき 5 個, $|a| > 2$ のとき 1 個



- (3) $f_n(x) = a$ をみたす実数 x の個数が、 $|a| < 2$ のとき 3^n 個であることを数学的帰納法で示す。

$n = 1$ のときが(1), $n = 2$ のときが(2)である。

或る n での成立を仮定すれば、 $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ なので、 $f_{n+1}(x) = a$ をみたす $f_n(x)$ の値は、

$-2 < f_n(x) < 2$ に異なる 3 個

が存在する。この 3 個の値を右辺として $f_n = \dots$ を考えれば帰納法の仮定により、各々について 3^n 個ずつの x の値が対応する。よって、 $n + 1$ のときには $3 \times 3^n = 3^{n+1}$ (個) となる。

したがって、上の主張が示された。

$|a| < 2$ になる a として特に $a = 0$ を考えれば、

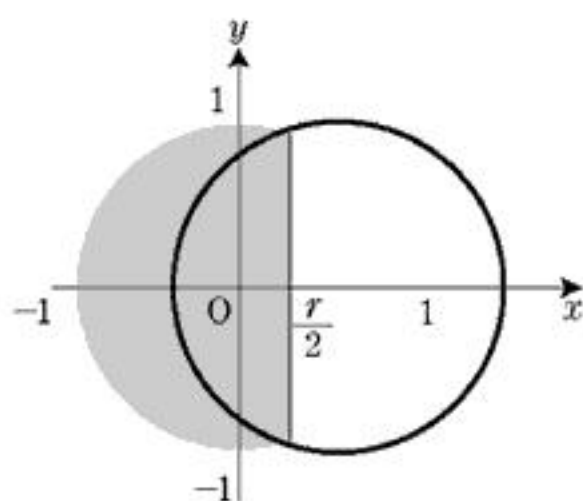
$f_n(x) = 0$ をみたす実数 x は 3^n 個である

が示された。

第5問

- (1) $r \geq 2$ のとき V は2つの球の体積の直和 $\frac{8}{3}\pi$ である。

$0 < r < 2$ のときには、右図の塗部を X 軸のまわりに1回転してできる立体の体積の2倍となるから、



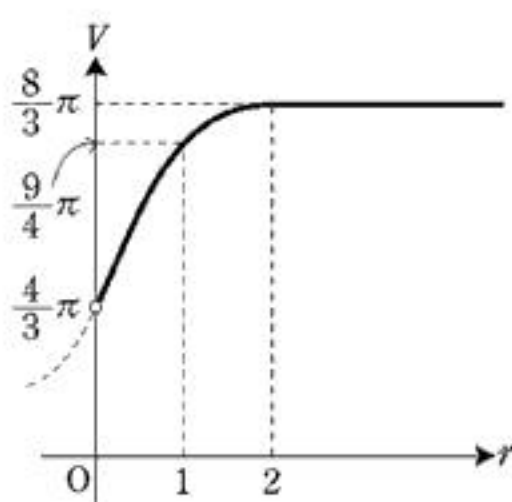
$$V = 2\pi \int_{-1}^{\frac{r}{2}} (1 - X^2) dx$$

$$= 2\pi \left[X - \frac{X^3}{3} \right]_{-1}^{\frac{r}{2}}$$

$$= 2\pi \left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{24} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \left(-\frac{r^3}{12} + r + \frac{4}{3} \right) \pi$$

$$V' = \left(-\frac{r^2}{4} + 1 \right) \pi = -\frac{\pi}{4} (r+2)(r-2)$$

よって、 V のグラフの概形は右図となる。



- (2) $r=1$ のとき V は $\left(-\frac{1}{12} + 1 + \frac{4}{3} \right) \pi = \frac{9}{4}\pi < 8$ であり、

$r = \frac{3}{2}$ のときには

$$\left(-\frac{1}{12} \times \frac{27}{8} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) \pi$$

$$= \frac{-27 + 144 + 128}{96} \pi = \frac{245}{96} \pi > \frac{245}{96} \times 3.14 > 8.01$$

であって、 $V=8$ をみたす r の値は $\frac{3}{2}$ よりも小さいが、かなり近い値であることがグラフから読みとれる。

$$r = 1.45 = \frac{145}{100} = \frac{29}{20} = 1 + \frac{9}{20} \text{ のとき } V \text{ は}$$

$$r^3 = \left(1 + \frac{9}{20} \right)^3 = 1 + \frac{27}{20} + \frac{243}{400} + \frac{729}{8000}$$

$$= \frac{8000 + 10800 + 4860 + 729}{8000} = \frac{24389}{8000}$$

$$\therefore V = \left(-\frac{24389}{96000} + \frac{29}{20} + \frac{4}{3} \right) \pi = \frac{-24389 + 139200 + 128000}{96000} \pi$$

$$= \frac{242811}{96000} \pi = \frac{80937}{32000} \pi < \frac{80937}{32000} \times 3.15 < 7.97$$

よって、 $V=8$ をみたす r の値は $1.45 < r < 1.5$ にあることがわかるので、四捨五入して小数第1位までを求めれば、 $r=1.5$ である。

第 6 問

- (1) 白白白の状態から 3 回の操作で、黒白白になるのは、
左端の白を 3 回続けて裏返す

または

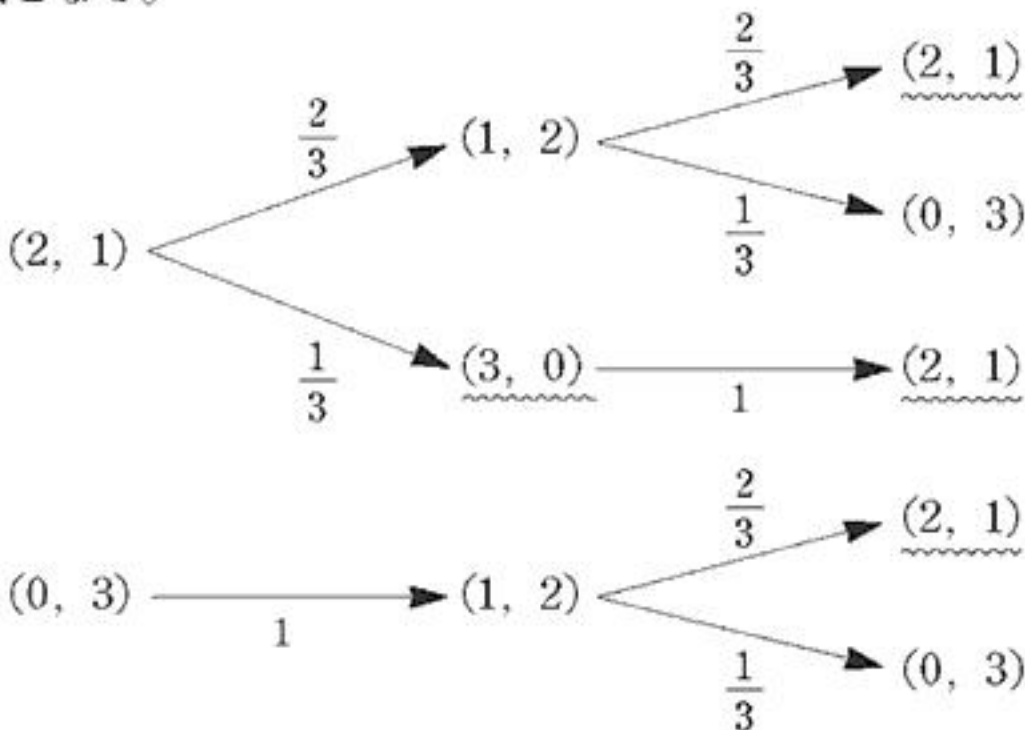
左端を 1 回と中央または右端のどちらかを 2 回裏返す
のいずれかなので、求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_2C_1 \times \frac{3!}{2!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} = \frac{7}{27}$$

- (2) 白の枚数が a 、黒の枚数が b である状態を (a, b) で表す。

$(3, 0)$ から始めるので偶数回の操作後は $(3, 0)$ または $(1, 2)$ であり、奇数回の操作後は $(2, 1)$ または $(0, 3)$ である。

$(2k-1)$ 回後、 $2k$ 回後、 $(2k+1)$ 回後の流れを樹形図にすれば、次となる。



$(2k+1)$ 回後に $(2, 1)$ となる確率を P_{2k+1} と書けば、

$$P_{2k+1} = P_{2k-1} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\right) + (1 - P_{2k-1}) \times \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow P_{2k+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{9} \left(P_{2k-1} - \frac{3}{4}\right); P_3 = 3 \times \frac{7}{27} = \frac{7}{9}$$

$$\Leftrightarrow P_{2k+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$(2, 1)$ の状態としては、黒白白、白黒白、白白黒の 3 通りの並び方が考えられるが、これらの発生の仕方は同等なので、白黒白となる確率は $n=2k+1$ のとき

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

また、 $(3, 0)$ の状態は $n=2k$ のときに発生し、これは樹形図から、

$$P_{2k-1} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} \text{ である。}$$

したがって、求める確率 P_n は

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} & \cdots \cdots n=2k+1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1} & \cdots \cdots n=2k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n & \cdots \cdots n \text{ が奇数} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & \cdots \cdots n \text{ が偶数} \end{cases}$$