

第1問

$f(0) = 0$ より, $f(x) = Ax^2 + Bx$. ゆえに $f'(x) = 2Ax + B$
 $-1 \leq x < 0$ では, $g'(x) = a$ なのだから,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx &= \int_{-1}^0 (2Ax + B - a)^2 dx \\ &= 4A^2 \int_{-1}^0 x^2 dx + 4A(B-a) \int_{-1}^0 x dx + (B-a)^2 \int_{-1}^0 dx \\ &= \frac{4}{3}A^2 - 2A(B-a) + (B-a)^2 \end{aligned}$$

同様に, $0 < x \leq 1$ では, $g'(x) = b$ なのだから,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx \\ &= \frac{4}{3}A^2 + 2A(B-b) + (B-b)^2 \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx \\ &= \left(\frac{4}{3}A^2 - 2A(B-a) + (B-a)^2 \right) + \left(\frac{4}{3}A^2 + 2A(B-b) + (B-b)^2 \right) \\ &= \frac{8}{3}A^2 + 2A(a-b) + (B-a)^2 + (B-b)^2 \\ &= (a+A-B)^2 + (b-A-B)^2 + \frac{2}{3}A^2 \geq \frac{2}{3}A^2. \end{aligned}$$

すなわち, $a = -A + B$, $b = A + B$ のとき最小値となる。

これは明らかに,

$$g(-1) = -a = A - B = f(-1)$$

$$g(1) = b = A + B = f(1)$$

をみちびく。

第2問

$a^2 - a = a(a-1)$ が, $10000 = 2^4 \times 5^4$ で割り切れる条件を考える。

(i) a と $a-1$ は互いに素. ($\rightarrow$ 共通する素因数なし)

(ii) $3 \leq a \leq 9999$ より

(ア) a は 10000 を因数にもたない.

(イ) $a-1$ は 10000 を因数にもたない.

(iii) a は奇数より, 2 を因数にもたない.

以上, (i) ~ (iii) より

$$\begin{cases} a \text{ は } 5^4 (= 625) \text{ を因数にもつ} & \text{--- ①} \\ a-1 \text{ は } 2^4 (= 16) \text{ を因数にもつ} & \text{--- ②} \end{cases}$$

ことがいえる.

①をみたす $3 \leq a \leq 9999$ なる奇数 a は,

$625 \times 16 = 10000 > 9999$ に注意すると,

$$a = 625 \times m \quad (m = 1, 3, 5, \dots, 15) \quad \text{--- ③}$$

となる。ここで

$$625 = 16 \times 39 + 1$$

なので, ③より

$$a = 16 \times 39 \times m + m \quad (m = 1, 3, 5, \dots, 15)$$

となり, このうち ②をみたす a は $m = 1$ のときのみ.

以上より, 題意をみたす a は, 625. (答)

第3問

$u = s + t$ とおくと, $u^2 = (s + t)^2 = 1 + 2st$ より,

$$2st = u^2 - 1.$$

ゆえに, $(s - t)^2 = (s + t)^2 - 2 \cdot (2st) = -u^2 + 2$ であるから,
与方程式は u を用いて,

$$x^4 - 2ux^2 + (-u^2 + 2) = 0$$

すなわち, $u^2 + 2x^2u - (x^4 + 2) = 0$ と書ける。

s, t が $s^2 + t^2 = 1, s \geq 0, t \geq 0$ をみたすとき,
 u の動く範囲は右図より,

$$1 \leq u \leq \sqrt{2} \text{ となる.}$$

よゆえ, 求める範囲を W とすると,

$$x \in W \Leftrightarrow$$

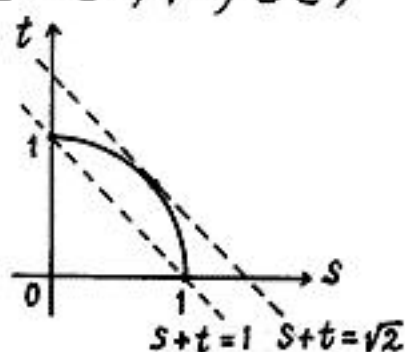
$$\begin{cases} x^4 - 2(s+t)x^2 + (s-t)^2 = 0 \\ s^2 + t^2 = 1 \\ s \geq 0, t \geq 0 \end{cases}$$

となる実数 s, t が存在する。

$$\Leftrightarrow u^2 + 2x^2u - (x^4 + 2) = 0 \text{ が}$$

$$1 \leq u \leq \sqrt{2} \text{ に解をもつ.}$$

となる。



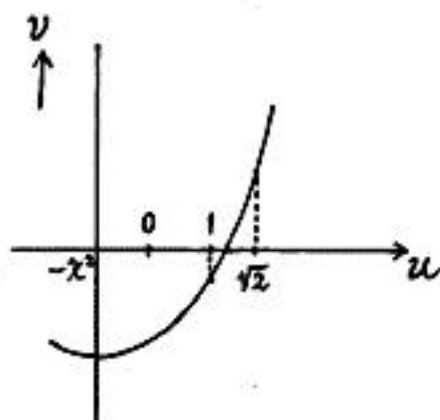
$f(u) = u^2 + 2x^2u - (x^4 + 2)$ とおくと,

放物線 $v = f(u)$ の軸は, $u = -x^2$ であり,

$u = 1$ の左側にある。

よゆえ, $v = f(u)$ のグラフは,

右図のようになる。



つまり,

$$x \in W \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(\sqrt{2}) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2x^2 - (x^4 + 2) \leq 0 \\ 2 + 2\sqrt{2}x^2 - (x^4 + 2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)^2 \geq 0 \\ x^2(x^2 - 2\sqrt{2}) \leq 0 \end{cases}$$

$(x^2 - 1)^2 \geq 0$ は常に成立し,

また, $x^2 \geq 0$ なので, $x^2(x^2 - 2\sqrt{2}) \leq 0$ は,

$$x^2 - 2\sqrt{2} \leq 0 \text{ となる.}$$

ゆえに,

$$-\sqrt{2\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{2\sqrt{2}}$$

つまり,

$$\underline{-\sqrt[4]{8} \leq x \leq \sqrt[4]{8}} \text{ が求める範囲である.}$$

第4問

(1) 甲が2回目にカードを引かなかった場合,

$b=0$ なので, $a+b=a \leq N$.

ゆえに, ステップ(ii)での乙の勝ちはない.

ステップ(iii)で乙が勝つのは, $a < c \leq N$ のとき,

つまり, $\frac{N-a}{N}$ の確率.

ステップ(iv)で乙が勝つのは,

$1 \leq c \leq a$ かつ, $a < c+d \leq N$ のとき.

つまり, $\frac{a}{N} \cdot \frac{(N-c)-(a-c)}{N} = \frac{a(N-a)}{N^2}$ の確率.

ゆえに, ステップ(ii)で甲が2回目のカードも引かずに勝つ確率は,

$$1 - \frac{N-a}{N} - \frac{a(N-a)}{N^2} = \frac{a^2}{N^2} \quad \text{となる.}$$

(2) ステップ(ii)で b も引いて, 甲が勝つ確率を考える.

ステップ(iii)で乙が勝つのは, $a+b < c \leq N$ のとき,

つまり, $\frac{N-(a+b)}{N}$ の確率.

ステップ(iv)で乙が勝つのは,

$1 \leq c \leq a+b$ かつ, $a+b < c+d \leq N$ のとき,

つまり, $\frac{a+b}{N} \cdot \frac{(N-c)-(a+b-c)}{N} = \frac{(a+b)(N-a-b)}{N^2}$ の確率.

ゆえに, ステップ(ii)で b を引いて甲が勝つ確率は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \cdot \left(1 - \frac{N-a-b}{N} - \frac{(a+b)(N-a-b)}{N^2} \right) \\ &= \frac{(a+b)^2}{N^3} \quad \text{となる.} \end{aligned}$$

$a=N$ のとき, 必ず $a+b > N$ となるので,

甲が勝つ確率は 0.

$a \neq N$ のとき, $1 \leq b \leq N-a$ となるので,

甲が勝つ確率は,

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{N-a} \frac{(a+b)^2}{N^3} &= \sum_{a+b=a+1}^N \frac{(a+b)^2}{N^3} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{N^3} - \sum_{k=1}^a \frac{k^2}{N^3} \\ &= \frac{1}{N^3} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{1}{N^3} \cdot \frac{a(a+1)(2a+1)}{6}. \end{aligned}$$

ゆえに, まとめて,

$$\frac{1}{6N^3} \{ N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1) \} \quad \text{となる.}$$