

第 1 問

(1)

数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき,

$$f^{(1)}(x) = \left(\frac{\log x}{x} \right)' = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

と書けるので成り立つ. $(a_1 = 1, b_1 = -1) \cdots \textcircled{1}$

$$(ii) f^{(k)}(x) = \frac{a_k + b_k \log x}{x^{k+1}} \cdots \textcircled{2}$$

と書けると仮定して,

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{a_{k+1} + b_{k+1} \log x}{x^{k+2}} \cdots \star$$

と書けることを示す.

②より,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(\frac{a_k + b_k \log x}{x^{k+1}} \right)' \\ &= \frac{b_k x^k - (k+1)(a_k + b_k \log x)x^k}{x^{2k+2}} \\ &= \frac{(b_k - (k+1)a_k) - (k+1)b_k \log x}{x^{k+2}} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_k - (k+1)a_k \\ b_{k+1} = -(k+1)b_k \end{cases} \cdots \textcircled{3}$$

とおけば, $\star$ は成り立つ.

以上(i), (ii)より, 題意は示された.

このとき, $\{a_n\}, \{b_n\}$ の漸化式は, ③より

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n - (n+1)a_n \\ b_{n+1} = -(n+1)b_n \end{cases} \cdots \textcircled{4}$$

$$(n \geq 1)$$

(2)

$\{a_n\}, \{b_n\}$ は漸化式④を満たし, 初項が

①で与えられる数列である. よって, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} b_n &= -nb_{n-1} \\ &= (-n)(-(n-1))b_{n-2} \\ &= (-n)(-(n-1)) \cdots (-2)b_1 \\ &= (-n)(-(n-1)) \cdots (-2)(-1) \\ &= (-1)^n n! \end{aligned}$$

(これは, $n=1$ でも成り立つ)

である. よって任意の n について $b_n \neq 0$ とわかるので, ④を辺々割って,

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n} - \frac{1}{n+1}$$

であるから, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{1}{n} \\ &= \left(\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}} - \frac{1}{n-1} \right) - \frac{1}{n} \\ &= \cdots \\ &= \frac{a_1}{b_1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{a_1}{b_1} - (h_n - 1) \\ &= -h_n \left(\because \frac{a_1}{b_1} = -1 \right) \end{aligned}$$

であるから,

$$a_n = (-h_n)b_n = (-1)^{n+1} n! h_n$$

(これは $n=1$ でも成り立つ)

第2問

$$w = z^2 - 2z \cdots \textcircled{1}$$

$\Leftrightarrow z^2 - 2z - w = 0$ なので、 w を固定したとき、

①を満たす z は、(重解を許すと)2つ存在する。 $\cdots \textcircled{2}$

その2つを α, β とおくと、

$$z^2 - 2z - w = (z - \alpha)(z - \beta)$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = -w \end{cases}$$

よって、 $\beta = 2 - \alpha$ とおくと、

$$w = -\alpha\beta = \alpha(\alpha - 2)$$

である。

以上の議論から、

$$w \in T \Leftrightarrow |\alpha| \leq \frac{5}{4}, |\beta| \leq \frac{5}{4} \text{ なる } \alpha, \beta \text{ が存在し、}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = -w \end{cases}$$

と書ける

$$\Leftrightarrow |\alpha|, |2 - \alpha| \leq \frac{5}{4} \text{ なる } \alpha \text{ が存在し、}$$

$$w = \alpha(2 - \alpha)$$

と書ける

であるから、結局、問題は、

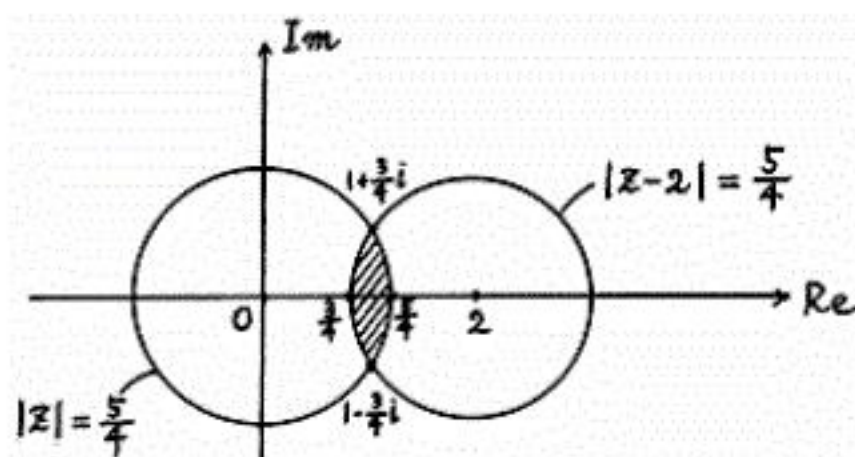
$$|\alpha|, |\alpha - 2| \leq \frac{5}{4} \cdots \textcircled{3} \text{ なる } \alpha \text{ に対して、}$$

$(|w| =) |\alpha| |\alpha - 2|$ の最大値を求める」 $\cdots \star$

ことに帰着される。

③をみたす α を複素数平面上に図示すると、

次図のようになる。



$$|\alpha| |\alpha - 2| \text{ は、 } \underbrace{(\alpha \text{ と } 0 \text{ の距離})}_A \times \underbrace{(\alpha \text{ と } 2 \text{ の距離})}_B$$

とかけ、上の図より、

$$\begin{cases} A \leq \frac{5}{4} \\ B \leq \frac{5}{4} \end{cases} \quad (\text{両方の等号は } \alpha = 1 \pm \frac{3}{4}i \text{ のとき成立})$$

であるから、 $\star$ において、

$$|w| \leq \frac{25}{16} \quad (\text{等号は } \alpha = 1 \pm \frac{3}{4}i \text{ のとき})$$

とわかる。したがって題意の w は、

$$w = \alpha(\alpha - 2) \text{ で、 } \alpha = 1 \pm \frac{3}{4}i \text{ としたもので、}$$

$$\underline{w = -\frac{25}{16}} \quad (\text{答})$$

第3問

(1)

$$f(x) = \frac{1}{2}x \{1 + e^{-2(x-1)}\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \{(1-2x)e^{-2(x-1)} + 1\}$$

$$f''(x) = 2(x-1)e^{-2(x-1)}$$

より、 $f'(x)$ の増減は、

x	$\left(\frac{1}{2}\right)$	...	1	...	(∞)
f''		-	0	+	
f'	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f'(1) = 0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \frac{1}{2}$$

となるので、

$$0 \leq f'(x) < \frac{1}{2} \text{ となる.}$$

(2)

(1)より、 $f(x)$ は $x > \frac{1}{2}$ で単調増加なので、

$x_n \neq 1$ となる x_n に対して平均値の定理から、

$$\frac{f(x_n) - 1}{x_n - 1} = f'(c)$$

となる c が1と x_n の間に存在する.

また、 $x_0 > \frac{1}{2}$ より、すべての x_n は $x_n > \frac{1}{2}$ を満たすので、

$$c > \frac{1}{2}$$

だから(1)より、

$$\frac{f(x_n) - 1}{x_n - 1} < \frac{1}{2}$$

すなわち、 $x_{n+1} = f(x_n)$ より、 $\frac{x_{n+1} - 1}{x_n - 1} < \frac{1}{2}$. よって、

$$0 < |x_n - 1| < \frac{1}{2} |x_{n-1} - 1| < \cdots < \frac{1}{2^n} (x_0 - 1)$$

$\downarrow \quad (n \rightarrow \infty)$
 0

となり、

はさみうちの原理により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - 1| = 0 \text{ すなわち } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

$x_0 = 1$ の場合、すべての n について、

$$x_n = 1 \text{ より、 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

第4問

条件は、 $a(a-1) \equiv 0 \pmod{10000} \cdots \star$

$$\begin{array}{c} || \\ 2^4 \times 5^4 \end{array}$$

ここで、

・ a と $a-1$ は互いに素 ($\rightarrow$ 共通する素因子なし)

・ $3 \leq a \leq 9999$ より $a \not\equiv 0 \pmod{10000}$

$$a-1 \not\equiv 0 \pmod{10000}$$

・ a は奇数より $a \not\equiv 0 \pmod{2}$

であることに注目すると、

$$a \equiv 0 \pmod{5^4 (=625)} \cdots \textcircled{1}$$

$\star \Leftrightarrow$

$$a-1 \equiv 0 \pmod{2^4 (=16)} \cdots \textcircled{2}$$

である。

①をみたす $3 \leq a \leq 9999$ なる奇数 a は、

$625 \times 16 = 10000 > 9999$ に注意すると、

$$a = 625 \times m \quad (m = 1, 3, 5, \dots, 15) \cdots \textcircled{3}$$

の形。

このとき、 $625 = 16 \times 39 + 1 \equiv 1 \pmod{16}$

より、

$$a \equiv m \pmod{16}$$

よって、③より、②をみたすのは $m=1$ のみ。

以上より、

a を $3 \leq a \leq 9999$ なる奇数とするとき、

$$\star \Leftrightarrow a = \underline{625} \quad (\text{答})$$

第5問

(1)

甲が2回目にカードを引かなかった場合、

$b=0$ なので、 $a+b=a \leq N$.

ゆえに、ステップ(ii)での乙の勝ちはない。

ステップ(iii)で乙が勝つのは、 $a < c \leq N$ のとき。

つまり、 $\frac{N-a}{N}$ の確率。

ステップ(iv)で乙が勝つのは、

$1 \leq c \leq a$ かつ、 $a < c+d \leq N$ のとき。

つまり、 $\frac{a}{N} \cdot \frac{(N-c)-(a-c)}{N} = \frac{a(N-a)}{N^2}$ の確率。

ゆえに、ステップ(ii)で甲が2回目のカードを引かずに勝つ確率は、

$$1 - \frac{N-a}{N} - \frac{a(N-a)}{N^2} = \frac{a^2}{N^2} \text{ となる.}$$

(2)

ステップ(ii)で b を引いて、甲が勝つ確率を考える。

ステップ(iii)で乙が勝つのは、 $a+b < c \leq N$ のとき。

つまり、 $\frac{N-(a+b)}{N}$ の確率。

ステップ(iv)で乙が勝つのは、

$1 \leq c \leq a+b$ かつ、 $a+b < c+d \leq N$ のとき。

つまり、 $\frac{a+b}{N} \cdot \frac{(N-c)-(a+b-c)}{N} = \frac{(a+b)(N-a-b)}{N^2}$ の確率。

ゆえに、ステップ(ii)で b を引いて甲が勝つ確率は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \left(1 - \frac{N-a-b}{N} - \frac{(a+b)(N-a-b)}{N^2} \right) \\ &= \frac{(a+b)^2}{N^3} \text{ となる.} \end{aligned}$$

$a=N$ のとき、必ず $a+b > N$ となるので、

甲が勝つ確率は0。

$a \neq N$ のとき $1 \leq b \leq N-a$ となるので

甲が勝つ確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{N-a} \frac{(a+b)^2}{N^3} &= \sum_{a+b=a+1}^N \frac{(a+b)^2}{N^3} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{N^3} - \sum_{k=1}^a \frac{k^2}{N^3} \\ &= \frac{1}{N^3} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{1}{N^3} \cdot \frac{a(a+1)(2a+1)}{6} \end{aligned}$$

ゆえに、まとめて、

$$\frac{1}{6N^3} \{N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1)\} \text{ となる.}$$

第6問

$$x^2 + y^2 \leq r^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y^2 + z^2 \leq r^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$z^2 + x^2 \leq r^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{より, } -y^2 - z^2 \leq -r^2 \quad \cdots \textcircled{2}'$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}' + \textcircled{3} \text{より, } x^2 \leq \frac{r^2}{2}$$

対称性より, $0 \leq x \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$ の部分の体積 V を求めて,

2倍すればよい. $x = r \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$) とする.

$$\textcircled{1}: |y| \leq r \cos \theta, \textcircled{2}: y^2 + z^2 \leq r^2, \textcircled{3}: |z| \leq r \cos \theta$$

これらを図示すると, 断面は右図

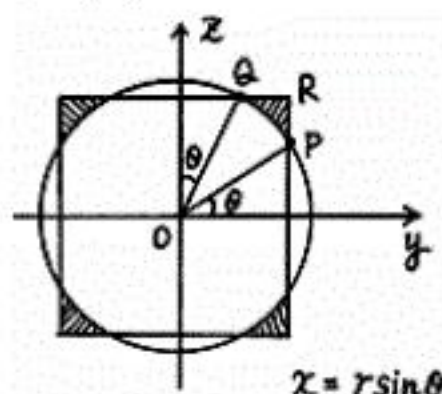
$$(P(r \cos \theta, r \sin \theta), Q(r \sin \theta, r \cos \theta))$$

で, y 軸, z 軸について対称.

$y, z \geq 0$ の部分の面積は,

$$\square OPRQ - \text{扇形}(O-PQ)$$

$$= 2 \triangle OQP - \frac{1}{2} \times r^2 \times \angle POQ$$



$$= 2 \times \frac{1}{2} \times (r \cos \theta - r \sin \theta) \times r \cos \theta - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \quad \cdots \textcircled{4}$$

これより, $x = r \sin \theta$ での断面積 $S(x)$ は, $\textcircled{4} \times 4$.

$$\therefore V = \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} S(x) dx$$

$$= 4 \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \left(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{r^2}{4} (\pi - 4\theta) \right) \cdot r \cos \theta d\theta$$

$$\left(\begin{array}{l} x = r \sin \theta \text{ と置換した.} \\ dx = r \cos \theta d\theta \text{ で,} \\ \hline x \quad 0 \rightarrow \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \hline \theta \quad 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right)$$

$$= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^3 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta - \frac{\pi}{4} \cos \theta + \theta \cos \theta \right) d\theta \quad \cdots \textcircled{5}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta &= \cos(1 - \sin^2 \theta) - \sin \theta \cos^2 \theta \\ &= \cos \theta - \cos \theta \sin^2 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\int \theta \cos \theta d\theta = \theta \sin \theta - \int \sin \theta d\theta = \theta \sin \theta + \cos \theta + C$$

なので,

$$\begin{aligned} V &= 4r^2 \left[\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \frac{\pi}{4} \sin \theta + \theta \sin \theta + \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 4r^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 + \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 - 1 \right\} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) \right) \\ &= 4r^2 \left(\sqrt{2} - \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって, 体積は } \underline{\underline{8r^3 \left(\sqrt{2} - \frac{4}{3} \right)}}$$