

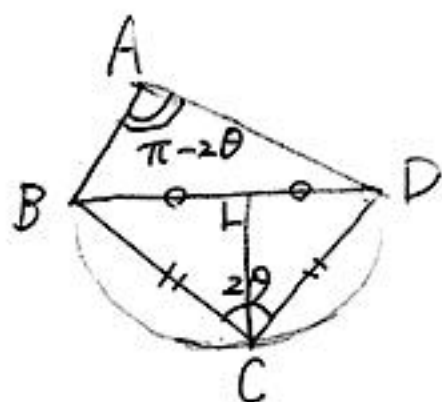
$AB = x, DA = y$ とおく.

また, $\angle BCD = 2\theta$ とおく. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ と,

$\angle DAB = \pi - 2\theta$

周長の条件から

$$\begin{aligned} x + y &= 44 - 2 \cdot 13 \\ &= 18 \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$



二等辺三角形 BCD を考え、

$$\begin{aligned} BD &= 2BC \sin \theta \\ &= 2 \cdot 13 \sin \theta \end{aligned}$$

$\triangle ABD$ に 余弦定理 を用いて

$$\begin{aligned} (2 \cdot 13 \sin \theta)^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos(\pi - 2\theta) \\ &= x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\theta \\ &= (x + y)^2 + 2xy(2\cos^2 \theta - 1 - 1) \end{aligned}$$

$$\triangle ABD \text{ に 正弦定理 を用いて} \quad \frac{BD}{\sin \angle DAC} = 2R \quad \text{--- ②}$$

$$\frac{BD}{\sin \angle DAC} = 2R \quad \text{より} \quad \frac{2 \cdot 13 \sin \theta}{\sin(\pi - 2\theta)} = 2 \cdot \frac{65}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot 13 \sin \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{13 \cdot 5}{4}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad \text{①と②より} \quad \sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$2^2 \cdot 13^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = (2 \cdot 13^2)^2 - 4xy \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2^2 \cdot 13^2 \cdot 13^2 = 2^2 \cdot 13^4 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 13^2 xy$$

$$\Leftrightarrow xy = 13^2 \cdot 5^2 - 13^2 = (5+13)(5-13) = 56$$

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 56 \end{cases} \quad \text{より} \quad t^2 - 18t + 56 = 0$$

$$\therefore \text{解いて} \quad (x, y) = (4, 14) \text{ または } (14, 4)$$

題意より、初めはX、終了時はOが出る
以下、Xは高々2回までしか出ないことに留意する

(1)考えられるOとXの順番は

X O O, X X O O, X O X O のみである

$$\begin{aligned}\therefore P_2 &= (1-p)p + p(1-p)p + (1-p)(1-p)(1-p) \\ &= (1-p)(2p^2 - p + 1)\end{aligned}$$

$$\therefore \underline{P_2 = (1-p)(2p^2 - p + 1)}$$

(2)考えられるOとXの順番は

X O O O, X X O O O, X O X O O, X O O X O のみである

$$\begin{aligned}\therefore P_3 &= (1-p)p^2 + p(1-p)p^2 + (1-p)^3p + (1-p)p(1-p)^2 \\ &= p(1-p)\{p + p^2 + (1-p)^2 + (1-p)^2\} \\ &= p(1-p)(3p^2 - 3p + 2)\end{aligned}$$

$$\therefore \underline{P_3 = p(1-p)(3p^2 - 3p + 2)}$$

(3)

(i) OとXの並び方が $X \overbrace{O \cdots O}^{n\text{個}}$ の場合

その確率は $(1-p)p^{n-1}$

(ii) OとXの並び方が $XX \overbrace{O \cdots O}^{n\text{個}}$ の場合

その確率は $p(1-p)p^{n-1} = p^n(1-p)$

(iii) OとXの並び方が $X \underbrace{O \cdots O}_{k\text{個}} X \underbrace{O \cdots O}_{n-k\text{個}}$ の場合
kを定めた時の確率は

$$(1-p)p^{k-1}(1-p)^2p^{n-k-1} = p^{n-2}(1-p)^3$$

この場合は $1 \leq k \leq n-1$ の $n-1$ パターンあるので

(iii) 全体での確率は

$$(n-1)p^{n-2}(1-p)^3$$

(i) ~ (iii) より

$$\begin{aligned}P_k &= p^{n-1}(1-p) + p^n(1-p) + (n-1)p^{n-2}(1-p)^3 \\ &= \underline{p^{n-2}(1-p)\{n(1-p)^2 + 3p - 1\}}\end{aligned}$$

$$1) \quad n = 1 \text{ のとき}$$

$$\textcircled{1} \text{ 可能な方, } x+y+z = x+y+z$$

さらに、 x, y, z は $1 \leq x \leq y \leq z$ を満たす整数であるから、

$$x+y+z = x+y+z \leq 3z \quad \therefore \quad x+y \leq 3z$$

z は正の整数であるから 両辺を z で割ると $x+y \leq 3$

x, y は $1 \leq x \leq y$ なる正の整数であるから、 $(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$

$$(x, y) = (1, 1) \text{ のとき}$$

$$1+1+z = z \text{ より, } z \text{ は存在しない。}$$

$$(x, y) = (1, 2) \text{ のとき}$$

$$1+2+z = 2z \quad \therefore \quad z = 3 \quad x \leq y \leq z \text{ であるから通ずる,}$$

$$(x, y) = (1, 3) \text{ のとき}$$

$$1+3+z = 3z \quad \therefore \quad z = 2 \quad x \leq y \leq z \text{ であるから通ずらない}$$

$$\underline{(x, y, z) = (1, 2, 3)}$$

(2) $x \leq y \leq z$ とすると、

$$x^3 + y^3 + z^3 = xyz \leq z^3$$

なので、 $x^3 + y^3 \leq 0$ である。一方で、
 $x, y > 0$ であるので、これらを同時に
 満たす (x, y, z) は存在しない。

(証明終)

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ かつ } x+1 \geq 0 \\ x-1 \leq 0$$

$$\text{よって } f(x) = (x+1)^3 + |x-t|^3 - (x-1)^3 \\ (\text{ただし } 0 < \cos 2\theta = t < 1) \\ = \begin{cases} -x^3 + (3t+6)x^2 - 3t^2x + t^3 + 2 & (x < t) \\ -x^3 + (6-3t)x^2 + 3t^2x - t^3 + 2 & (x \geq t) \end{cases}$$

(i) $x > t$ のとき

$$f'(x) = 3x^2 + 2(6-3t)x + 3t^2 \\ = 3(x-t)^2 + 12x > 0 \quad (\because x \geq t > 0)$$

(ii) $x < t$ のとき

$$f'(x) = -3x^2 + 2(3t+6)x - 3t^2 \dots \textcircled{1}$$

$$f''(x) = -6x + 2(3t+6) \\ = 6(t-x) + 12 > 0 \quad (\because x < t)$$

よって $f'(x)$ は $x < t$ で単調に増加し、

$$f'(0) = -3t^2 < 0, \quad f'(t) = 12t > 0 \text{ なること、}$$

$f(x) = 0$ なる $0 < x < t$ が唯一存在する。

以上 (i) (ii) より、 $f(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) の増減表は、次のようになる。

x	-1	...	x	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって $f(x)$ が最小となるときの x の値は $x = \alpha$ であり、これは $\textcircled{1} = 0$ を満たす。

$$\text{よって } -3\alpha^2 + 2(3t+6)\alpha - 3t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2(t+2)\alpha + t^2 = 0$$

$$\therefore \alpha = t+2 \pm \sqrt{4t+4}$$

ただし $-1 < \alpha < t$ なること $\alpha = t+2 + \sqrt{4t+4}$ は不適。

$$\text{また、 } 4t+4 < t^2+6t+9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4t+4} < t+3$$

$$\Leftrightarrow -1 < t+2 - \sqrt{4t+4} \dots \textcircled{2}$$

$$\text{さらに、 } 4 < 4t+4$$

$$\Leftrightarrow 2 < \sqrt{4t+4}$$

$$\Leftrightarrow t+2 - \sqrt{4t+4} < t \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2} \textcircled{3}$ より $\alpha = t+2 - \sqrt{4t+4}$ は

$$-1 < \alpha < t \text{ を満たす。}$$

最後に、 $t = \cos 2\theta$ を代入して

$$\alpha = \cos 2\theta + 2 - \sqrt{4 \cos 2\theta + 4}$$

$$= \underline{\underline{2 \cos^2 \theta - 2\sqrt{2} \cos \theta + 1}}$$