

第 1 問

(1)

与えられた条件に $n=2$ を代入して

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3} = \frac{3}{2} \overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \overrightarrow{OP_3} = -\overrightarrow{OP_1} + \frac{3}{2} \overrightarrow{OP_2}$$

ここで、実数 s, t ($s, t \neq 0$) を用いて、

$$P_1 \left(s, \frac{1}{s} \right), P_2 \left(t, \frac{1}{t} \right)$$

と書くと、

$$P_3 \left(\frac{3}{2}t - s, \frac{3}{2t} - \frac{1}{s} \right)$$

と表せる。ここで、点 P_3 が曲線 $xy=1$ にあるならば

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}t - s \right) \left(\frac{3}{2t} - \frac{1}{s} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{13}{4} - \frac{3}{2} \left(\frac{t}{s} + \frac{s}{t} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{t}{s} + \frac{s}{t} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{t}{s} = k$ とおくと、 k は実数であり、

$$k + \frac{1}{k} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2k^2 - 3k + 2 = 0$$

この 2 次方程式の判別式を D と置くと、

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0$$

これより、この 2 次方程式は実数解を持たず、

k が実数であることに矛盾する。

以上から、点 P_3 は曲線 $xy=1$ 上にないことが示された。

(証明完了)

(2)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{p_1} \\ \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{p_2} \\ \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{p_3} \\ \overrightarrow{OP_4} = \overrightarrow{p_4} \end{cases}$$

と書くと、

$$\begin{cases} \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_3} = \frac{3}{2} \overrightarrow{p_2} \Rightarrow \overrightarrow{p_1} = \frac{3}{2} \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_3} \\ \overrightarrow{p_2} + \overrightarrow{p_4} = \frac{3}{2} \overrightarrow{p_3} \Rightarrow \overrightarrow{p_4} = \frac{3}{2} \overrightarrow{p_3} - \overrightarrow{p_2} \end{cases}$$

ゆえに

$$\begin{cases} |\overrightarrow{p_1}|^2 = \frac{9}{4} + 1 - 3\overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{p_3} = \frac{13}{4} - 3\overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{p_3} \\ |\overrightarrow{p_4}|^2 = \frac{9}{4} + 1 - 3\overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{p_3} = \frac{13}{4} - 3\overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{p_3} \end{cases}$$

となり、

$$|\overrightarrow{p_1}| = |\overrightarrow{p_4}|$$

を得る。これは p_4 も $x^2 + y^2 = 1$ 上にあることを示している。

(証明完了)

第2問

題意より、始めは $\times$ 、終了時は $\circ$ が出る。
以下、 $\times$ は高々2回までしか出ないことに留意する。

(1)

考えられる $\circ$ と $\times$ の順番は
 $\times\circ\circ, \times\times\circ\circ, \times\circ\times\circ$

のみである。よって

$$\begin{aligned} p_2 &= (1-p)p + p(1-p)p + (1-p)^3 \\ &= (1-p)(2p^2 - p + 1) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad (1-p)(2p^2 - p + 1)$$

(2)

(i) $\circ$ と $\times$ の並び方が $\times \overbrace{\circ \cdots \circ}^{n\text{個}}$ の場合

$$(1-p)p^{n-1}$$

(ii) $\circ$ と $\times$ の並び方が $\times \times \overbrace{\circ \cdots \circ}^{n\text{個}}$ の場合

$$p(1-p)p^{n-1}$$

(iii) $\circ$ と $\times$ の並び方が $\times \overbrace{\circ \cdots \circ}^{k\text{個}} \times \overbrace{\circ \cdots \circ}^{n-k\text{個}}$ の場合

$$(1-p)p^{k-1}(1-p)^2 p^{n-k-1} = p^{n-2}(1-p)^3$$

この場合は $1 \leq k \leq n-1$ の $n-1$ パターンあるので、

(iii)全体の確率は

$$(n-1)p^{n-2}(1-p)^3$$

以上より、求める確率は

$$p^{n-1}(1-p) + p^n(1-p) + (n-1)p^{n-2}(1-p)^3 = p^{n-2}(1-p)\{n(1-p)^2 + 3p - 1\}$$

$$(\text{答}) \quad p^{n-2}(1-p)\{n(1-p)^2 + 3p - 1\}$$

(2) (別解)

記号 $\times$ が最初のものも含めて3個出るよりも前に、記号 $\circ$ が $n+1$ 個出る場合を考える。

(i) n 個目が $\circ$ の場合

n 個目までの確率は P_n で、その次に $\circ$ が出る確率は p である。

(ii) n 個目が $\times$ の場合

最初と n 個目が $\times$ なので、残りはすべて $\circ$ が出る。 n 個目までの確率は

$(1-p)\times p^{n-1}\times(1-p)$ となり、 $n+1$ 個目に $\circ$ が出る確率は $(1-p)$ である。

以上より、

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n \times p + (1-p) \times p^{n-1} \times (1-p) \times (1-p) \\ &= pP_n + (1-p)^3 p^{n-1} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで記号 $\times$ が最初のものも含めて3個出るよりも前に、記号 $\circ$ が1個出るのは、 $\times\circ, \times\times\circ$ の場合である。これから

$$\begin{aligned} P_1 &= (1-p) + p(1-p) \\ &= 1-p^2 \end{aligned}$$

である。①の両辺を p^{n+1} で割ると

$$\frac{P_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{P_n}{p^n} + \frac{(1-p)^3}{p^2}$$

これから、数列 $\left\{\frac{P_n}{p^n}\right\}$ は公差 $\frac{(1-p)^3}{p^2}$ の等差数列なので

$$\begin{aligned} \frac{P_n}{p^n} &= \frac{P_1}{p^1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-p)^3}{p^2} \\ &= \frac{1-p^2}{p} + (n-1) \frac{(1-p)^3}{p^2} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} P_n &= (1-p^2)p^{n-1} + (n-1)(1-p)^3 p^{n-2} \\ &= p^{n-2}(1-p)\{n(1-p)^2 + 3p - 1\} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad p^{n-2}(1-p)\{n(1-p)^2 + 3p - 1\}$$

第3問

(1)

対称移動により原点および y 軸上の点が第1象限に移るため、 $\alpha \neq 0$ としてよい。ここで、

$$l: y = \alpha x + q$$

と書く。すると、まず原点 O が $y=1$ 上の点 Q に移ることから、

OQ と l の交点を Q' と書くと、 Q' の y 座標は $\frac{1}{2}$ となる。

また、 Q' の x 座標は Q' が $y = -\frac{1}{\alpha}x$ 上にあることから、

$$x = -\frac{\alpha}{2}$$

これより $Q' \left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 。よって $Q(-\alpha, 1)$

また、 Q' は l 上にあるから

$$q = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 1)$$

と書ける。よって

$$l: y = \alpha x + \frac{1}{2}(\alpha^2 + 1)$$

であり、さらに、点 P の対称移動について、 PR と l の交点を R' と書くと、直線 PR は

$$y = -\frac{1}{\alpha}x + p$$

と書けることから、 R' の x 座標は

$$-\frac{1}{\alpha}x + p = \alpha x + \frac{1}{2}(\alpha^2 + 1) \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \left\{ p - \frac{1}{2}(\alpha^2 + 1) \right\}$$

よって、 R の座標は

$$\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \left\{ p - \frac{1}{2}(\alpha^2 + 1) \right\}, \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} p + 1 \right)$$

となる。今、 R が直線 m 上にあることから

$$\tan \theta = \frac{\frac{1}{\alpha^2 + 1} \left\{ (\alpha^2 - 1)p + \alpha^2 + 1 \right\}}{\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \left\{ p - \frac{1}{2}(\alpha^2 + 1) \right\}} = \frac{(\alpha^2 - 1)p + \alpha^2 + 1}{\alpha(2p - \alpha^2 - 1)}$$

$$(答) \quad \frac{(\alpha^2 - 1)p + \alpha^2 + 1}{\alpha(2p - \alpha^2 - 1)}$$

(2)

原点を通り直線 l に垂直な直線は $y = -\frac{1}{\alpha}x$ と書けるから、

条件を満たす点 P が存在すれば $\tan \frac{\theta}{3} = -\frac{1}{\alpha}$ が常に成立する。今、

$$\begin{cases} \tan \frac{2}{3}\theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{3}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{3}} \\ \tan \theta = \frac{\tan \frac{1}{3}\theta + \tan \frac{2}{3}\theta}{1 - \tan \frac{1}{3}\theta \tan \frac{2}{3}\theta} \end{cases}$$

から、

$$\tan \theta = \frac{-\frac{1}{\alpha} - \frac{\frac{2}{\alpha^2}}{1 - \frac{1}{\alpha^2}}}{\frac{\frac{2}{\alpha^2}}{1 - \frac{1}{\alpha^2}}} = \frac{1 - 3\alpha^2}{\alpha(\alpha^2 - 3)}$$

と書ける。これが全ての α に対して(1)の $\tan \theta$ と一致するような P が存在することを示せばよい。

$$\frac{1 - 3\alpha^2}{\alpha(\alpha^2 - 3)} = \frac{(\alpha^2 - 1)p + \alpha^2 + 1}{\alpha(2p - \alpha^2 - 1)}$$

が全ての α に対して成り立つ p の条件は、 $\alpha^2 = t$ とおくと、 $t > 0$ で

$$\frac{1 - 3t}{t - 3} = \frac{(t - 1)p + t + 1}{2p - t - 1}$$

整理すると

$$(t + 1)^2 p = 2(t + 1)^2$$

これが t についての恒等式になるのは、 $p = 2$ のとき。

ゆえに、条件を満たす点 P が存在することが示された。

$$(答) \quad p = 2$$

第4問

(1)

$x \leq y, y \leq 3$ より

$$(x, y) = (1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 2), (2, 2), (1, 1)$$

のときのみを考えればよい。与式を

$$z^2 - xyz + x^2 + y^2 = 0$$

とし、 z の2次方程式と考える。

$$f(z) = z^2 - xyz + x^2 + y^2$$

と置くと、軸は

$$z = \frac{xy}{2} > 0$$

また、

$$f(0) = x^2 + y^2 > 0$$

より、

$$D = (-xy)^2 - 4(x^2 + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(y^2 - 4) \geq 16$$

が必要条件となる。これを満たすのは

$$(x, y) = (3, 3)$$

のみである。このとき、

$$z^2 - 9z + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 3)(z - 6) = 0$$

より、

$$z = 3, 6$$

これより、

$$(x, y, z) = (3, 3, 3), (3, 3, 6)$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad (x, y, z) = (3, 3, 3), (3, 3, 6)$$

(2)

仮定より2次方程式

$$x^2 - bcx + b^2 + c^2 = 0$$

は $x = a$ を解に持つ。もう一つの解を z とすると、

$$a + z = bc$$

となる。よって、

$$z = bc - a$$

は整数となる。また、

$$z - c = bc - a - c = (b - 1)c - a \geq 2c - a \quad (\because b \geq 3)$$

であり、

$$2c - a > 0 \quad (\because a \leq c)$$

であるから、

$$z > c$$

となる。これより、全ての条件を満たす z が存在することが示された。

(証明完了)

(3)

(x_n, y_n, z_n) から(2)の操作により $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ を作ることで列 $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ を考える。

$$z_n < z_{n+1}$$

であることから、この列に含まれる組は、全て互いに異なる。よって、条件(A)を満たす組 (x_1, y_1, z_1) が一組でも存在すれば、このような組は無数に存在する。よって題意は示された。

(証明完了)

第5問

(1)

$$(a_n+1)^2>0$$

より, a_n と a_{n+1} の符号は一致する。したがって, 帰納的に, 任意の n について

$$a_n>0$$

がいえることに注意する。また, $b_1=2$ であり

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= a_n + 2 + \frac{1}{a_n} \\ &= b_n + 2 + \frac{1}{b_n} \end{aligned}$$

となる。以下, n についての帰納法で

$$b_n>2n$$

を示す。

(i) $n=2$ のとき

$$b_2=2+2+\frac{1}{2}>2\cdot 2$$

より, 成立する。

(ii) $n=k$ において, $b_k>2k$ が成り立つと仮定する。このとき

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= b_k + 2 + \frac{1}{b_k} \\ &= b_k + 2 + a_k \\ &> b_k + 2 \\ &> 2(k+1) \end{aligned}$$

より, $n=k+1$ でも成立する。以上(i), (ii)より,

任意の $n>1$ について $b_n>2n$ が示された。

(証明完了)

(2)

まず, $a_n>0$ より

$$0<\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

である。一方, (1)より, $n>1$ のとき

$$a_n=\frac{1}{b_n}<\frac{1}{2n}$$

であり,

$$a_1=\frac{1}{2}$$

より, $n\geq 1$ ならば

$$a_n\leq \frac{1}{2n}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n) &\leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

である。ここで $y=\frac{1}{x}$ を考えると, $x>0$ で単調減少関数であり,

$$\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$$

となる。 $k=1,2,\cdots,n-1$ として辺々加えると

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-1<\int_1^n\frac{dx}{x}$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n) &\leq \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\ &\leq \frac{1}{2n}\left(1+\int_1^n\frac{dx}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2n}(1+\log n) \end{aligned}$$

ここで,

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{2n}(1+\log n)=0$$

なので, はさみうちの原理より

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$$

$$(答) \quad \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$$

(3)

$$c_n=b_n-2n$$

と置く。

$$b_{n+1}=b_n+2+\frac{1}{b_n}$$

より,

$$\begin{aligned} c_{n+1}-c_n &= b_{n+1}-2(n+1)-(b_n-2n) \\ &= b_{n+1}-b_n-2 \\ &= \frac{1}{b_n} \\ &= a_n \end{aligned}$$

だから, $c_1=0$ に注意して

$$c_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1} \quad (n\geq 2)$$

を得る。よって

$$\frac{c_n}{n}=-\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)-\frac{a_n}{n}$$

だが,

$$0<a_n<\frac{1}{2n}$$

より,

$$\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=0$$

なので, (2)とあわせて

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{c_n}{n}=0$$

を得る。ここで,

$$\frac{c_n}{n}=\frac{1}{na_n}-2$$

なので,

$$\lim_{n\rightarrow\infty}na_n=\frac{1}{2}$$

$$(答) \quad \lim_{n\rightarrow\infty}na_n=\frac{1}{2}$$

第6問

(1)

$$t=e^x$$

と置き、

$$f(x)=h(t)=\frac{12(t^3-3t)}{t^2-1}$$

とする。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h(t) &= \frac{12}{(t^2-1)^2} \left\{ (3t^2-3)(t^2-1) - (t^3-3t) \cdot 2t \right\} \\ &= \frac{12}{(t^2-1)^2} (t^4+3)\end{aligned}$$

$t>1$ より、 $\frac{d}{dt}h(t)>0$ なので、 $h(t)$ は単調増加関数。

また、

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1+0} h(t) = \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{12t(t^2-3)}{(t+1)(t-1)} = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{12t \left(1 - \frac{5}{t^2} \right)}{\left(1 + \frac{1}{t} \right) \left(1 - \frac{1}{t} \right)} = +\infty \end{cases}$$

であるから、次の増減表を得る。

x	0	...	∞
t	1	...	∞
$\frac{d}{dt}h(t)$		+	
$f(x)=h(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	∞

これより、 $f(x)$ の値域は実数全体にわたり、また単調増加のため、 t と $f(x)$ は 1 対 1 に対応する。また、 x と t は $0 < x$ 、 $1 < t$ の範囲で 1 対 1 に対応するので、 x と $f(x)$ も 1 対 1 に対応する。
したがって、 $y=f(x)$ は実数全体を定義域とする逆関数を持つ。

(証明完了)

(2)

$$27 = \frac{12(t^3-3t)}{t^2-1} \Leftrightarrow (t-3)(4t^2+3t-3)=0$$

より、

$$t=3 \Rightarrow x=\log 3$$

また、

$$8 = \frac{12(t^3-3t)}{t^2-1} \Leftrightarrow (t-2)(3t^2+4t-1)=0$$

より、

$$t=2 \Rightarrow x=\log 2$$

であるから、グラフより、求める値は

$$\int_8^{27} g(x) dx = 27 \log 3 - 8 \log 2 - \int_{\log 2}^{\log 3} f(x) dx$$

ここで、

$$\begin{aligned}\int_{\log 2}^{\log 3} f(x) dx &= \int_2^3 \frac{12(t^3-3t)}{t^2-1} \cdot \frac{dt}{t} \\ &= 12 \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt \\ &= 12 \left[t + \log(t+1) - \log(t-1) \right]_2^3 \\ &= 12 + 12 \log 2 - 12 \log 3\end{aligned}$$

であるから、求める面積は

$$39 \log 3 - 20 \log 2 - 12$$

となる。

(答) $39 \log 3 - 20 \log 2 - 12$