

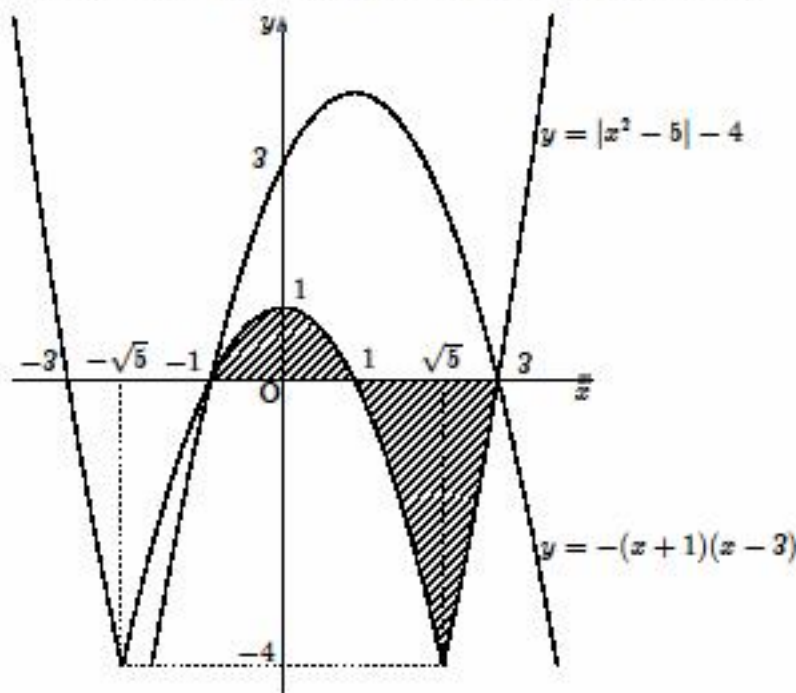
第1問

(1)

領域 D は

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq |x^2 - 5| - 4 \\ y \leq -(x+1)(x-3) \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq |x^2 - 5| - 4 \\ y \leq -(x+1)(x-3) \end{cases}$$

を満たす領域なので、下図の斜線部(ただし境界線も含む)となる.



(2)

(1) より

$$\begin{aligned} (D \text{ の面積}) &= \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^{\sqrt{5}} (x^2 - 1) dx + \int_{\sqrt{5}}^3 (-x^2 + 9) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^{\sqrt{5}} + \left[-\frac{x^3}{3} + 9x \right]_{\sqrt{5}}^3 \\ &= \underline{\underline{20 - \frac{20}{3}\sqrt{5} \dots (\text{答})}} \end{aligned}$$

第2問

(1)

半径 R の円の周の長さは $2\pi R$ である.

これに操作(P)を行って得られる2つの円の周の長さの和は

$$2\pi rR + 2\pi(1-r)R = 2\pi R$$

であり元の円の周の長さと等しい.

つまり円に操作(P)を行っても周の長さの和は変わらない.

したがって n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和は、最初の円の周の長さ 2π と等しいことが帰納的にいえるので、求める長さの和は

$$\underline{2\pi} \cdots \text{(答)}$$

(2)

4つの円の半径はそれぞれ

$$r^2, r(1-r), (1-r)r, (1-r)^2$$

であるから求める円の面積の和は

$$\pi \{r^4 + 2r^2(1-r)^2 + (1-r)^4\} = \underline{\pi (2r^2 - 2r + 1)^2} \cdots \text{(答)}$$

(3)

半径 R の円の面積は πR^2 である.

これに操作(P)を行って得られる2つの円の面積の和は

$$\pi \{r^2 + (1-r)^2\} R^2 = \pi R^2 (2r^2 - 2r + 1)$$

であり、元の面積の $(2r^2 - 2r + 1)$ 倍となる.

したがって n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を S_n とすると

$$S_{n+1} = (2r^2 - 2r + 1) S_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \quad S_0 = \pi$$

したがって $\{S_n\}$ は公比 $(2r^2 - 2r + 1)$ の等比数列となるので

$$S_n = \underline{\pi (2r^2 - 2r + 1)^n} \cdots \text{(答)}$$

第3問

$$\begin{aligned}5(m+10)^4 &= 5m^4 + 200m^3 + 3000m^2 + 20000m + 50000 \\&= 5m^4 + 100(2m^3 + 30m^2 + 200m + 500) \\&= 5m^4 + 100N \quad (N \text{ は正の整数})\end{aligned}$$

したがって、 $5m^4$ と $5(m+10)^4$ の下2桁は等しい。よって m が1から10の場合についてのみ調べればよい。このとき $5m^4$ の下2桁は順にそれぞれ

$$5, 80, 5, 80, 25, 80, 5, 80, 5, 0$$

となる。

以上より $5m^4$ の下2桁としてあらわれる数は0, 5, 25, 80のみである。

(注)

$m = 10 - k$ とすると

$$\begin{aligned}5m^4 &= 5(10 - k)^4 \\&= 5k^4 + 100N'\end{aligned}$$

の形となり、 $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ について調べれば十分。

第4問

(1)

$0 \leq m < n$ のとき、題意を満たす条件は、 $n - m$ 回目に裏が出て、残り m 回はずっと表が出る場合のみである。

$m = n$ のとき、題意を満たす条件は、すべて表が出る場合のみである。

したがって、求める確率は

$$(答) \begin{cases} p_m = \frac{(1-p)p^m}{1-p^{n+1}} & (0 \leq m < n \text{ のとき}) \\ p_n = p^n & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

$0 \leq m < n$ のとき、 $0 \leq k \leq m$ (k は整数) とすると、 $p_k = (1-p)p^k$ より

$$\begin{aligned} q_m &= \sum_{k=0}^m p_k = \sum_{k=0}^m (1-p)p^k \\ &= \frac{(1-p)(1-p^{m+1})}{1-p} \\ &= 1 - p^{m+1} \dots (答) \end{aligned}$$

また、 $m = n$ のとき、ブロックの高さは常に n 以下となることから

$$q_n = 1 \dots (答)$$

である。

(3)

1度目のブロックの高さが m で、2度目のブロックの高さが m 以下となる確率は $p_m \times q_m$ であり、逆に1度目のブロックの高さが m 以下で、2度目のブロックの高さが m となる確率も $q_m \times p_m$ である。

また、どちらのブロックの高さも m となる確率は $p_m \times p_m$ である。

したがって、求める確率は

$$2p_m q_m - p_m^2 = \begin{cases} \frac{p^m(1-p)(2-p^m-p^{m+1})}{p^n(2-p^n)} & (0 \leq m < n \text{ のとき}) \\ p^n & (m = n \text{ のとき}) \end{cases} \dots (答)$$