

第1問

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 \quad (m \geq n, a_m \neq 0)$$

とおく.

また

$$(1+x)^k P(x) = b_{m+k} x^{m+k} + \cdots + b_0$$

とおく.

$(1+x)^k P(x) = ({}_k C_0 x^k + \cdots + {}_k C_k x^0) (a_m x^m + \cdots + a_0)$ なので、係数を比較して

$$b_l = \sum_{i=0}^l {}_k C_{k-l+i} a_i \quad (0 \leq l \leq n)$$

(ただし、 $r < 0$ のときは ${}_k C_r = 0$ とする)

となる.

$b_0, b_1, \dots, b_n$ は全て整数であるとする. このとき、 $a_0, \dots, a_n$ が整数であることを、数学的帰納法を用いて示す.

(i) a_0 は、 $b_0 (= a_0)$ が整数であるので整数である.

(ii) $a_0, \dots, a_{j-1}$ ($1 \leq j \leq n$) が全て整数であると仮定する. このとき

$$\begin{aligned} b_j &= \sum_{i=0}^j {}_k C_{k-j+i} a_i \\ &= \underline{{}_k C_{k-j} a_0 + {}_k C_{k-j+1} a_1 + \cdots + {}_k C_{k-1} a_{j-1}} + {}_k C_k a_j \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①の左辺は、上記の通り整数であり、また、①の右辺の下線部は、帰納法の仮定と組み合わせの数が整数であることより整数の積と和といえる. よって、 ${}_k C_k a_j = a_j$ も整数である.

以上 (i)(ii) から数学的帰納法により、題意は示された.

第2問

$$\angle P_{k-1}OP_k = \angle P_kOP_{k+1}, \angle OP_{k-1}P_k = \angle OP_kP_{k+1} \text{ より}$$

$$\triangle OP_{k-1}P_k \sim \triangle OP_kP_{k+1}$$

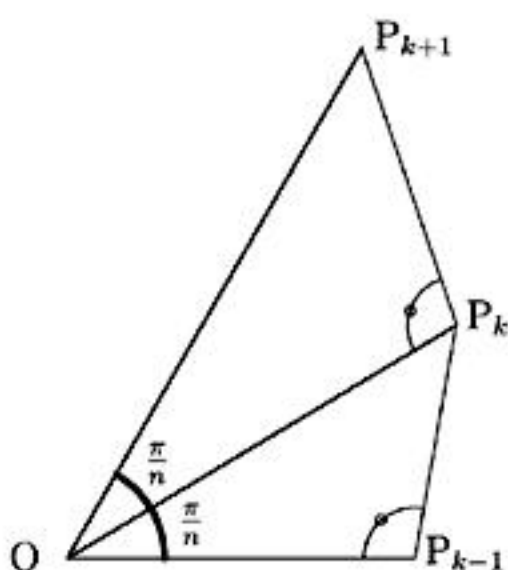
また帰納的に,

$$\triangle OP_0P_1 \sim \triangle OP_{k-1}P_k$$

が成立.

$$\begin{aligned} \therefore a_{k+1} : a_k &= OP_k : OP_{k-1} \\ &= OP_1 : OP_0 \\ &= 1 + \frac{1}{n} : 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_k$$



したがって, $\{a_k\}$ は公比 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ の等比数列なので

$$a_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} a_1 \text{ と表せる.}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに, } s_n = \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} a_1 \right\} \\ &= \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)} a_1 \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} na_1 \end{aligned}$$

ここで $\triangle OP_0P_1$ について余弦定理を用いれば

$$a_1^2 = 1^2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n}$$

$a_1 > 0$ より

$$a_1 = \sqrt{1^2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n}}$$

したがって

$$s_n = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \sqrt{1 + 2(n^2 + n) \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)}$$

ここで

$$\begin{aligned} 2(n^2 + n) \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) &= 4n(n+1) \left(\frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{2}\right) \\ &= 4n(n+1) \sin^2 \frac{\pi}{2n} \\ &= 4n(n+1) \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{n+1}{n} \\ &\rightarrow \pi^2 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \underline{(e-1)\sqrt{1+\pi^2}} \quad \dots (\text{答})$$

第3問

(1)

$P(p, p^2), Q(q, q^2)$ とする. $(-1 \leq p \leq 1, -1 \leq q \leq 1)$

$$PR : RQ = 1 : 2 \text{ より, } R\left(\frac{2p+q}{3}, \frac{2p^2+q^2}{3}\right)$$

したがって, 点 (a, b) が D に属するとき,

$$\begin{cases} a = \frac{2p+q}{3} \dots \textcircled{1} \\ b = \frac{2p^2+q^2}{3} \dots \textcircled{2} \end{cases} \text{とおける.}$$

①より, $q = 3a - 2p$. これを②に代入して

$$2p^2 + (3a - 2p)^2 = 3b$$

$$\therefore b = 2p^2 - 4ap + 3a^2 = 2(p - a)^2 + a^2$$

a を固定し, p を変化させて b の値域を調べる. p の条件は

$$\begin{cases} -1 \leq p \leq 1 \dots \textcircled{3} \\ -1 \leq 3a - 2p \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3a-1}{2} \leq p \leq \frac{3a+1}{2} \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

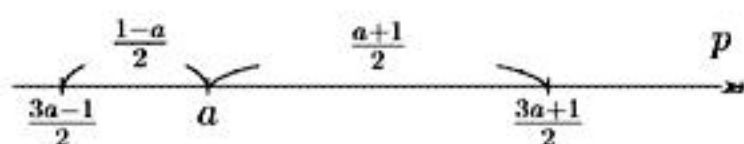
対称性から $0 \leq a \leq 1$ を考えればよい. このとき,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{3a-1}{2} \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{3a+1}{2}$$

である.

(i) $\frac{3a+1}{2} \leq 1$ すなわち $a \leq \frac{1}{3}$ のとき

$$p \text{ の条件を整理して, } \textcircled{3} \text{ かつ } \textcircled{4} \Leftrightarrow \frac{3a-1}{2} \leq p \leq \frac{3a+1}{2}$$

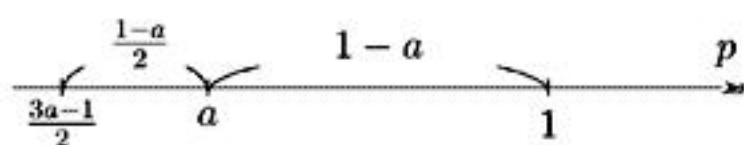


上図より, p の二次関数 b は $p = \frac{3a+1}{2}$ で最大, $p = a$ で最小となる.

$$\therefore a^2 \leq b \leq \frac{(a+1)^2}{2} + a^2$$

(ii) $\frac{3a+1}{2} > 1$ すなわち $a > \frac{1}{3}$ のとき

$$p \text{ の条件を整理して, } \textcircled{3} \text{ かつ } \textcircled{4} \Leftrightarrow \frac{3a-1}{2} \leq p \leq 1$$



上図より, p の二次関数 b は $p = 1$ で最大, $p = a$ で最小となる.

$$\therefore a^2 \leq b \leq 2(a-1)^2 + a^2$$

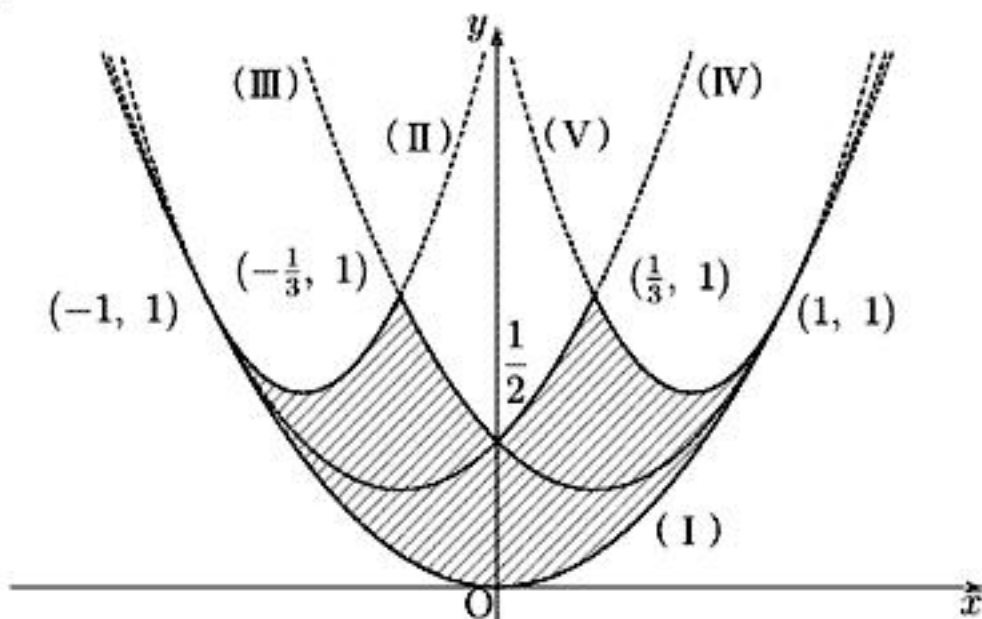
以上より, a の対称性を考えると, b の条件は

$$(\text{答}) \begin{cases} -1 \leq a < -\frac{1}{3} \text{ のとき} & a^2 \leq b \leq 2(a+1)^2 + a^2 = 3\left(a + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \leq a < 0 \text{ のとき} & a^2 \leq b \leq \frac{(a-1)^2}{2} + a^2 = \frac{3}{2}\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \\ 0 \leq a \leq \frac{1}{3} \text{ のとき} & a^2 \leq b \leq \frac{(a+1)^2}{2} + a^2 = \frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} < a \leq 1 \text{ のとき} & a^2 \leq b \leq 2(a-1)^2 + a^2 = 3\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \end{cases}$$

(2)

(1) より, 求める領域は下図斜線部となる.

ただし, 境界は全て含む.



$$\begin{cases} y = x^2 \dots \textcircled{I} \\ y = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \dots \textcircled{II} \\ y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \dots \textcircled{III} \\ y = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \dots \textcircled{IV} \\ y = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \dots \textcircled{V} \end{cases}$$

第4問

(1)

$$\begin{aligned}
 (P+Q)A &= (P+Q)\{aP+(a+1)Q\} \\
 &= aP^2+(a+1)PQ+aQP+(a+1)Q^2 \\
 &= aP+(a+1)Q \quad (\because P^2=P, PQ=QP=O, Q^2=Q) \\
 &= A
 \end{aligned}$$

よって題意は示された.

(2)

$\det A = a(a+1) > 0$ ($\because a > 0$) より $\det A \neq 0$ なので, A の逆行列が存在する.

よって, $(P+Q)A = A$ の両辺に右から A^{-1} をかけて

$$\begin{aligned}
 P+Q &= E \\
 \Leftrightarrow Q &= E-P
 \end{aligned}$$

これを $A = aP + (a+1)Q$ に代入して,

$$A = aP + (a+1)(E-P)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore P &= (a+1)E - A \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= E - P \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

これらは確かに題意の5つの条件をすべてみたす.

(3)

各 A_k に対して

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば

$$A_k = kP + (k+1)Q, P^2 = P, PQ = QP = O, Q^2 = Q$$

をみたす.

$$\begin{aligned}
 \therefore A_n A_{n-1} \cdots A_2 &= \{nP + (n+1)Q\} \{(n-1)P + nQ\} \cdots (2P + 3Q) \\
 &= n!P^n + \frac{(n+1)!}{2}Q^n \quad (\because PQ = QP = O) \\
 &= n!P + \frac{(n+1)!}{2}Q \\
 &\quad (\because P^2 = P, Q^2 = Q \text{ より帰納的に } P^n = P, Q^n = Q) \\
 &= \begin{pmatrix} n! & 0 \\ -n! & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{(n+1)!}{2} & \frac{(n+1)!}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} n! & 0 \\ \frac{n-1}{2} \cdot n! & \frac{(n+1)!}{2} \end{pmatrix} \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

第5問

(1)

$0 \leq m < n$ のとき、題意を満たす条件は、 $n - m$ 回目に裏が出て、残り m 回はずっと表が出る場合のみである。

$m = n$ のとき、題意を満たす条件は、すべて表が出る場合のみである。

したがって、求める確率は

$$(\text{答}) \begin{cases} p_m = \frac{(1-p)p^m}{1-p} & (0 \leq m < n \text{ のとき}) \\ p_n = p^n & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

$0 \leq m < n$ のとき、 $0 \leq k \leq m$ (k は整数) とすると、 $p_k = (1-p)p^k$ より

$$\begin{aligned} q_m &= \sum_{k=0}^m p_k = \sum_{k=0}^m (1-p)p^k \\ &= \frac{(1-p)(1-p^{m+1})}{1-p} \\ &= \underline{1-p^{m+1}} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

また、 $m = n$ のとき、ブロックの高さは常に n 以下となることから

$$q_n = \underline{1} \cdots (\text{答})$$

である。

(3)

1 度目のブロックの高さが m で、2 度目のブロックの高さが m 以下となる確率は $p_m \times q_m$ であり、逆に 1 度目のブロックの高さが m 以下で、2 度目のブロックの高さが m となる確率も $q_m \times p_m$ である。

また、どちらのブロックの高さも m となる確率は $p_m \times p_m$ である。

したがって、求める確率は

$$2p_m q_m - p_m^2 = \begin{cases} \frac{p^m(1-p)(2-p^m-p^{m+1})}{1-p} & (0 \leq m < n \text{ のとき}) \\ p^n(2-p^n) & (m = n \text{ のとき}) \end{cases} \cdots (\text{答})$$

第6問

(1) a を固定して x のみ動かして考える.

$$f(x) = \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt - \frac{2x}{a}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(a+x)'}{a+x} - \frac{(a-x)'}{a-x} - \frac{2}{a} \\ &= \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} - \frac{2}{a} \\ &= \frac{2x^2}{a(a+x)(a-x)} \\ &> 0 \quad (\because 0 < x < a) \end{aligned}$$

また, $f(0) = 0$ より $f(x) > 0$

$$\therefore \frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt \quad (0 < x < a)$$

次に

$$g(x) = x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) - \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt$$

とおくと

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} + x \left\{ \frac{-1}{(a+x)^2} - \frac{-1}{(a-x)^2} \right\} - \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \\ &= \frac{4ax^2}{(a+x)^2(a-x)^2} > 0 \quad (\because 0 < x < a) \end{aligned}$$

また, $g(0) = 0$ より $g(x) > 0$

$$\therefore \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \quad (0 < x < a)$$

以上より

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \quad (0 < x < a)$$

は示された.

(2)

$$\int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt = \log \frac{a+x}{a-x} = \log \frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}$$

そこで, $\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}} = \sqrt{2}$ すなわち, $\frac{x}{a} = 3-2\sqrt{2}$ として, (1) の式に代入すると

$$2 \cdot \frac{x}{a} < \log \frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}} < \frac{\frac{x}{a}}{1+\frac{x}{a}} + \frac{\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}$$

より

$$2 \cdot (3-2\sqrt{2}) < \log \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore 2 \cdot 2(3-2\sqrt{2}) < 2 \log \sqrt{2} < 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(3-2\sqrt{2}) < \log 2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

が成立する. ゆえに

$$0.68 < 4(3-2\sqrt{2}), \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < 0.71$$

を示せばよい. ここで,

$$\begin{aligned} 0.68 &< 4(3-2\sqrt{2}) \\ \Leftrightarrow 8\sqrt{2} &< 12-0.68 \\ \Leftrightarrow (8\sqrt{2})^2 &< (12-0.68)^2 \\ \Leftrightarrow 128 &< 128.1424 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &< 0.71 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} &< 2 \cdot 0.71 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 &< (2 \cdot 0.71)^2 \\ \Leftrightarrow 2 &< 2.0164 \end{aligned}$$

したがって, これらは確かに成り立つので題意は示された.