

第1問

(1) f により $P(X, Y)$ が $P'(x, y)$ に移るとすると, 条件より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$$

$a_n X + b_n Y = 1$ より,

$$a_n \left(-\frac{1}{2}y \right) + b_n \left(x + \frac{3}{2}y \right) = 1$$

$$\therefore b_n x + \left(-\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \right) y = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

①は $l_{n+1}: a_{n+1}x + b_{n+1}y = 1$ と一致する. よって係数比較することにより

$$a_{n+1} = b_n, b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \quad \dots (\text{答})$$

(2) a_n と b_n の一般項を求める. l_0 の条件より

$$a_0 = 3, b_0 = 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

また, (1) より

$$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \\ a_{n+1} - 2b_{n+1} = a_n - 2b_n \end{cases}$$

よって $\{a_n - b_n\}, \{a_n - 2b_n\}$ は等比数列で, ②より

$$\begin{cases} a_n - b_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n (a_0 - b_0) = \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ a_n - 2b_n = a_0 - 2b_0 = -1 \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

$$\therefore \begin{cases} a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 1 \\ b_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1 \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

よって,

$$\begin{aligned} a_n x + b_n y > 1 &\iff \left(\frac{2}{2^n} + 1 \right) x + \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right) y > 1 \\ &\iff \frac{1}{2^n} (2x + y) > 1 - x - y \end{aligned}$$

(i) $2x + y > 0 \iff y > -2x$ のとき

$\frac{1}{2^n} (2x + y)$ は n に関して単調減少. よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (2x + y) = 0$$

より

$$0 \geq 1 - x - y \iff y \geq -x + 1$$

(ii) $2x + y = 0 \iff y = -2x$ のとき

$$0 > 1 - x - y \iff y > -x + 1$$

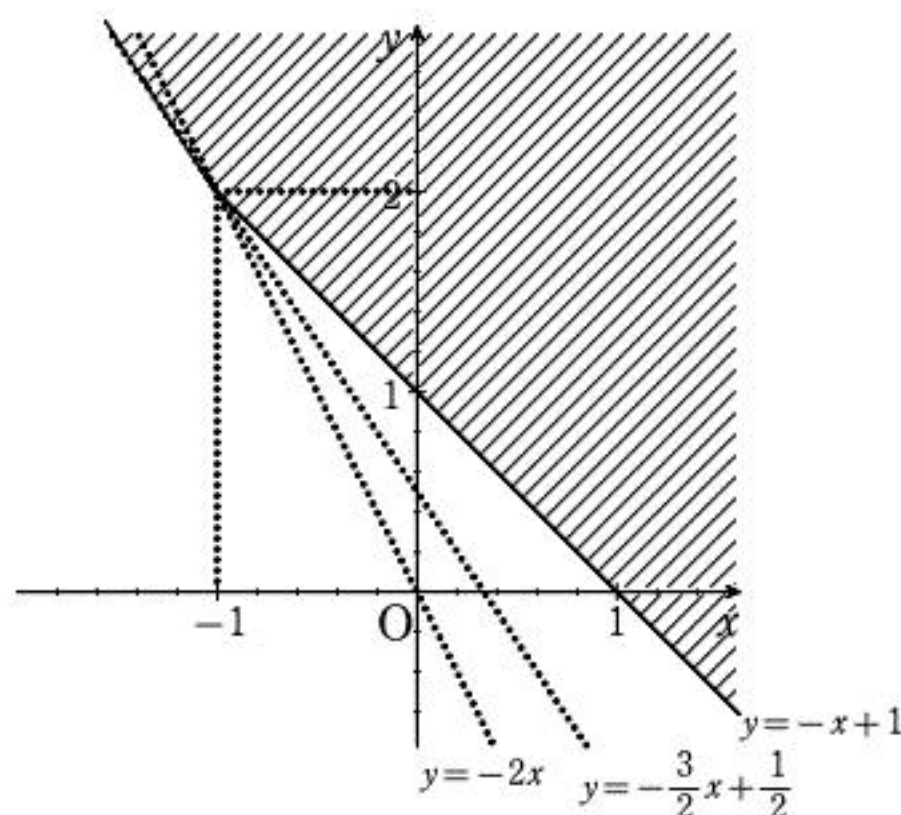
(iii) $2x + y < 0 \iff y < -2x$ のとき

$\frac{1}{2^n} (2x + y)$ は n に関して単調増加. よって

$$\frac{1}{2^0} (2x + y) > 1 - x - y \iff y > -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

以上より, 求める領域は下図斜線部分.

(ただし境界は, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ の $x \leq -1$ の部分は含まず, $y = -x + 1$ の $x > -1$ の部分を含む.)



- (1) 白が4枚そろった場合を考え、白の枚数の変化をみると、白の数が4または0になると終了することから、

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \quad \text{あるいは} \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

という変化をくり返す。そして最後に

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$$

となって終了する。以上より、

$$n=2k-1 \quad (k \text{ は自然数}) \text{ のとき、確率は } 0 \quad \dots (\text{答})$$

$$n=2k \quad (k \text{ は自然数}) \text{ のとき、}$$

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 2, \quad \text{あるいは} \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

を $k-1$ 回くり返し、最後に

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$$

となる場合で

$$\left(\frac{2}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} \right)^{k-1} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1}$$

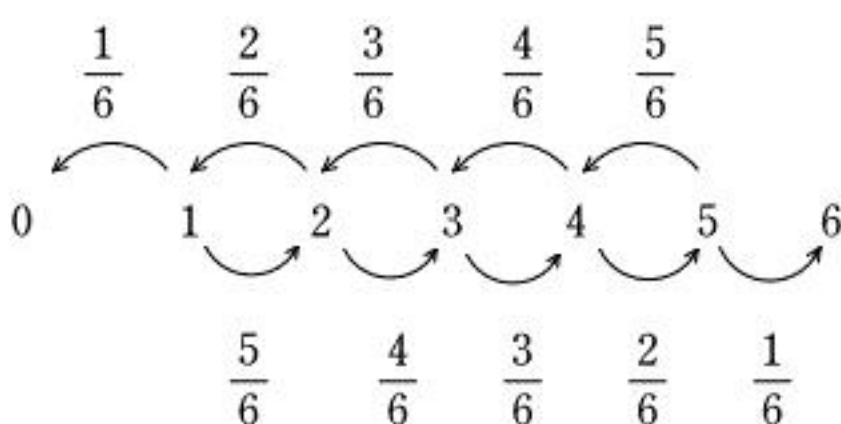
これを黒についても考え、結局求める確率は

$$\frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1} \times 2 = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{n}{2}-1} \quad \dots (\text{答})$$

- (2) 白の枚数について考える。

$2k-1$ 回目に2である確率を p_k 、4である確率を q_k とおく。

白の枚数の確率の関係は次のようになる。



これより、 $p_1 = \frac{3}{6}$ 、 $q_1 = \frac{3}{6}$ である。また、2または4からの2回の操作

(ただし、終了する場合は除く) を考えると、

$$\begin{cases} 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 & \frac{2}{6} \times \frac{5}{6} \\ 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 & \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \\ 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 & \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \\ 4 \rightarrow 5 \rightarrow 4 & \frac{2}{6} \times \frac{5}{6} \\ 4 \rightarrow 3 \rightarrow 4 & \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \\ 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 & \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \end{cases}$$

がある。これより、 p_{k+1} 、 q_{k+1} を p_k 、 q_k で表すと

$$\begin{cases} p_{k+1} = \left(\frac{2}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \right) p_k + \left(\frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \right) q_k \\ q_{k+1} = \left(\frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \right) p_k + \left(\frac{2}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \right) q_k \end{cases}$$

となる。整理して

$$\begin{cases} p_{k+1} = \frac{11}{18} p_k + \frac{1}{3} q_k & \dots \textcircled{1} \\ q_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{11}{18} q_k & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① + ②より

$$p_{k+1} + q_{k+1} = \frac{17}{18} (p_k + q_k)$$

よって、 $\{p_k + q_k\}$ は初項 $p_1 + q_1 = 1$ 、公比 $\frac{17}{18}$ の等比数列であり、

$$p_k + q_k = \left(\frac{17}{18} \right)^{k-1} \quad \dots \textcircled{3}$$

① - ②より

$$p_{k+1} - q_{k+1} = \frac{5}{18} (p_k - q_k)$$

よって、 $\{p_k - q_k\}$ は初項 $p_1 - q_1 = 0$ 、公比 $\frac{5}{18}$ の等比数列であり、

$$p_k - q_k = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

③、④より

$$p_k = q_k = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{18} \right)^{k-1}$$

となる。ここで、題意の確率は $n-2$ 回目で4に至り、そのあと

$$4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$$

となって終了する場合の確率である。したがって、 $n-2 = 2k-1$ となる

k は $\frac{n-1}{2}$ であるから、

$$n \text{ が偶数のときは不適ゆえ、確率は } 0 \quad \dots (\text{答})$$

$$n=1 \text{ のときは } 0 \quad \dots (\text{答})$$

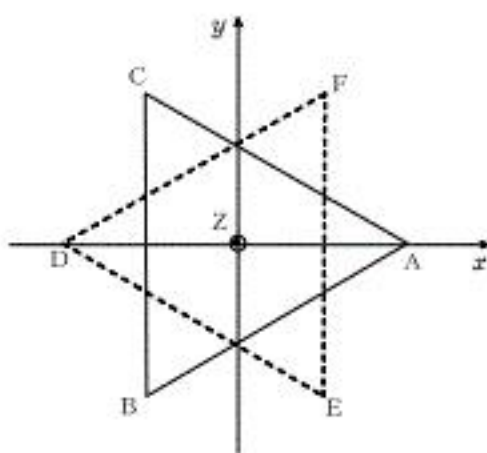
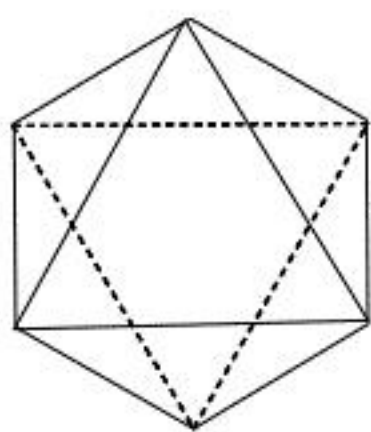
n が3以上の奇数のとき

$$p_{\frac{n-1}{2}} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{18} \right)^{\frac{n-3}{2}} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \left(\frac{17}{18} \right)^{\frac{n-3}{2}}$$

黒の場合も考え、

$$\frac{1}{36} \left(\frac{17}{18} \right)^{\frac{n-3}{2}} \times 2 = \frac{1}{18} \left(\frac{17}{18} \right)^{\frac{n-3}{2}} \quad \dots (\text{答})$$

(1)



(2) 右上図のように頂点の名前を定める．（ $\triangle ABC$ の重心を G_1 とする）
さらに

$$G_1(0, 0, 0), A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), C\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

と座標を設定する．このとき、

$$F\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, z\right) \quad (z > 0)$$

とすると、 $AF = 1$ より

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 1$$

$$\therefore z = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$C\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, 0\right)$ と $F\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ を $s:1-s$ に内分する点を

$P\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = (1-s) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}}(2s-1) \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3}s \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

P の z 座標を t とおくと

$$\frac{\sqrt{6}}{3}s = t$$

$$\therefore s = \frac{3}{\sqrt{6}}t = \frac{\sqrt{6}}{2}t$$

これを ① に代入すると

$$\begin{cases} x_p = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{6}t - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}t - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ y_p = \frac{1}{2} \\ z_p = t \end{cases}$$

$(0, 0, t)$ と P との距離を r とすると

$$r^2 = \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}t + \frac{1}{3} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

対称性より、 $z = t$ での求める立体の断面は半径 r の円であるので、
断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}t + \frac{1}{3} \right)$$

よって、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} S(t) dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}t + \frac{1}{3} \right) dt \\ &= \pi \left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2\sqrt{6}}t^2 + \frac{1}{3}t \right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \\ &= \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{27} - \frac{\sqrt{6}}{18} + \frac{\sqrt{6}}{9} \right) \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{54} \pi \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

第4問

(1) $P(p, p^2), Q(q, q^2)$ とする. ($p < q$)

$$\begin{cases} h = \frac{p^2 + q^2}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} m = \frac{q^2 - p^2}{q - p} = q + p \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$L = |q - p| \sqrt{1 + m^2} = (q - p) \sqrt{1 + m^2}$$

$$\therefore q - p = \frac{L}{\sqrt{1 + m^2}} \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ より

$$\begin{aligned} h &= \frac{p^2 + q^2}{2} \\ &= \frac{(q + p)^2 + (q - p)^2}{4} \\ &= \frac{m^2 + \frac{L^2}{m^2 + 1}}{4} \\ &= \frac{m^2(m^2 + 1) + L^2}{4(m^2 + 1)} \end{aligned} \quad \dots (\text{答})$$

(2) $m = q + p$ はすべての実数の値をとるので, $t = m^2 + 1$ は1以上の全ての実数の値をとる. $h = f(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4}(t - 1) + \frac{L^2}{4t} \\ &= \frac{1}{4} \left(t + \frac{L^2}{t} \right) - \frac{1}{4} \quad (t \geq 1) \end{aligned}$$

(i) $0 < L \leq 1$ のとき

$$f'(t) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{L^2}{t^2} \right) \geq 0$$

よって

$$\min \{f(t)\} = f(1) = \frac{L^2}{4}$$

(ii) $1 < L$ のとき

相加・相乗平均の関係より

$$t + \frac{L^2}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{L^2}{t}} = 2L$$

ここで, 等号が成立するのは $t = \frac{L^2}{t}$, すなわち $t = L$ のときである.

よって

$$\min \{f(t)\} = \frac{1}{4} \cdot 2L - \frac{1}{4} = \frac{2L - 1}{4}$$

以上より, h がとりうる値の最小値は

$$\begin{cases} \frac{L^2}{4} & (0 < L \leq 1) \\ \frac{2L - 1}{4} & (1 < L) \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(1)

「 $\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが、 3^{m+1} では割り切れない」

ということを $P(m)$ とおく. 0 以上の整数 m で $P(m)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す.

(i) $m=0$ のとき

$\boxed{3^m}=1$ ゆえ、 $3^m (=1)$ では割り切れるが、 $3^{m+1} (=3)$ では割り切れない.

(ii) $P(k)$ ($k=0, 1, \dots$) が正しいと仮定する. このとき、

$$\begin{aligned}\boxed{3^{k+1}} &= \frac{1}{9} (10^{3^{k+1}} - 1) \\ &= \frac{1}{9} (10^{3^k \cdot 3} - 1) \\ &= \frac{1}{9} \left\{ (10^{3^k})^3 - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{9} (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) \quad (\alpha = 10^{3^k} \text{ とする})\end{aligned}$$

ここで仮定より

$$\frac{1}{9}(\alpha - 1) = 3^k \times l \quad (\text{ただし、} l \text{ は自然数で } 3 \text{ では割り切れない})$$

と表せる. よって $\alpha = 3^{k+2}l + 1$.

これを用いて

$$\begin{aligned}\boxed{3^{k+1}} &= 3^k l \left\{ (3^{k+2}l)^2 + 3 \times 3^{k+2}l + 3 \right\} \\ &= 3^{k+1} l (3^{2k+3}l^2 + 3^{k+2}l + 1)\end{aligned}$$

この括弧内は 3 では割り切れないので、 $P(k+1)$ は成り立つ.(i), (ii) より、 0 以上の全ての整数 m に対して $P(m)$ は成り立つ. ■

(2)

(i) 十分性について

 $n = 27m$ とおく.

$$\begin{aligned}\boxed{n} &= \frac{1}{9} \left\{ (10^{27})^m - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{9} (10^{27} - 1) \left\{ (10^{27})^{m-1} + (10^{27})^{m-2} + \dots + 10^{27} + 1 \right\}\end{aligned}$$

ここで $\frac{1}{9}(10^{27} - 1)$ は (1) より 27 で割り切れる.ゆえに $\boxed{n}$ は 27 で割り切れる.

(ii) 必要性について

 $\boxed{n}$ は 3 で割り切れるので、各位の数の和 n が 3 の倍数になる. $\boxed{n}$ を 3 で割ると

$$\frac{\boxed{n}}{3} = 370370 \dots 37037 \quad \left(37 \text{ は } \frac{n}{3} \text{ 個ある} \right)$$

 $\boxed{n}$ は 27 で割り切れることより、右辺は 9 で割り切れる.よって各位の和 $(3+7) \times \frac{n}{3}$ は 9 の倍数になる. $\frac{10n}{3}$ が 9 の倍数になるので、 n は 27 の倍数である.

以上 (i), (ii) より題意は示された. ■

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2\sin 2t \\ \frac{dy}{dt} = \sin t + t \cos t \end{cases}$$

より, 各値の増減は下の表のようになる.

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$\frac{dx}{dt}$	0	−	0	+	0	−	0	+	0
$\frac{dy}{dt}$	0	+		$+\rightarrow -$		−		$-\rightarrow +$	
(x, y)	(1, 0)	$\searrow$	$\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$	$\curvearrowright$	(1, 0)	$\swarrow$	$\left(-1, -\frac{3}{2}\pi\right)$	$\curvearrowleft$	(1, 0)

このとき, $t=0, \pi, 2\pi$ 以外の自己交差点がないことを示す.

$t=a, b$ の点が一致すると仮定すると, $(a, b \neq 0, \pi, 2\pi)$

$$\begin{cases} \cos 2a = \cos 2b & \dots \textcircled{1} \\ a \sin a = b \sin b & \dots \textcircled{2} \\ a \neq b & \dots \textcircled{3} \\ 0 < a, b < 2\pi, a, b \neq \pi & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

②, ④より, $\sin a$ と $\sin b$ の符号が一致するので

$$0 < a, b < \pi \quad \text{または} \quad \pi < a, b < 2\pi$$

①, ③より

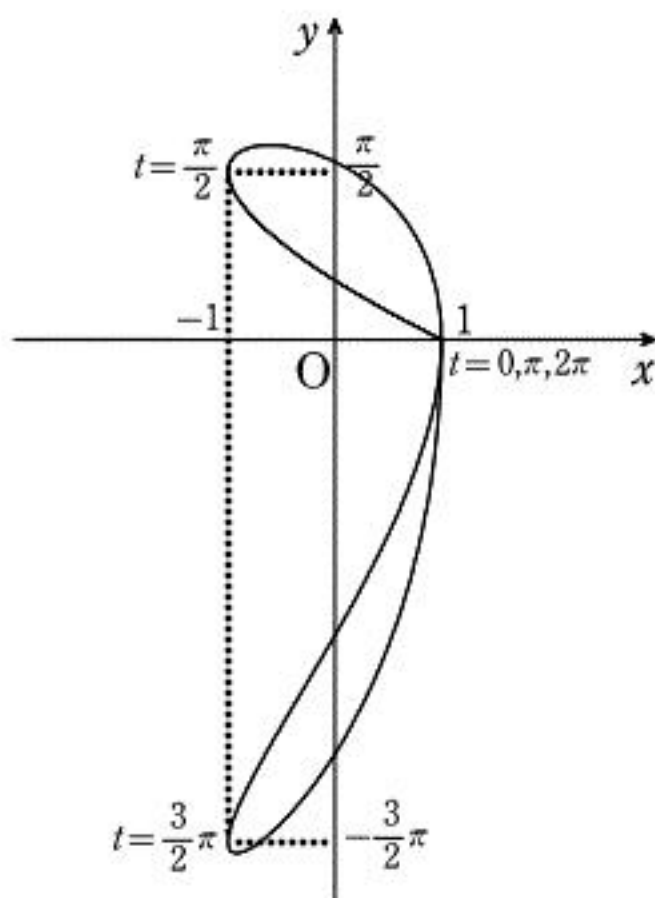
$$a + b = \pi \quad \text{または} \quad a + b = 3\pi$$

改めて②より $\sin a = \sin b$ なので

$$\sin a(a - b) = 0$$

$$\therefore \sin a = 0 \quad (\because \textcircled{3} \text{より } a - b \neq 0)$$

これは④に反するので, 一致する点はない.



グラフ上の点の動きから, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= -\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0} y dx + \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi} y dx + \int_{t=\frac{3}{2}\pi}^{t=\pi} -y dx + \int_{t=\frac{3}{2}\pi}^{t=2\pi} -y dx \\ &= \int_{t=0}^{t=\pi} y dx - \int_{t=\pi}^{t=2\pi} y dx \end{aligned}$$

ここで, 不定積分 $Y(t) = \int y dx$ を求める.

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int y dx \\ &= \int y \left(\frac{dx}{dt} \right) dt \\ &= \int -4t \cos t \sin^2 t dt \\ &= -\frac{4}{3} t \sin^3 t + \frac{4}{3} \int \sin^3 t dt \\ &= -\frac{4}{3} t \sin^3 t + \frac{4}{3} \int \sin t (1 - \cos^2 t) dt \\ &= -\frac{4}{3} t \sin^3 t - \frac{4}{3} \cos t + \frac{4}{9} \cos^3 t + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= -Y(0) + 2Y(\pi) - Y(2\pi) \\ &= -\left(-\frac{8}{9}\right) + 2 \cdot \frac{8}{9} - \left(-\frac{8}{9}\right) \\ &= \frac{32}{9} \end{aligned} \quad \dots (\text{答})$$