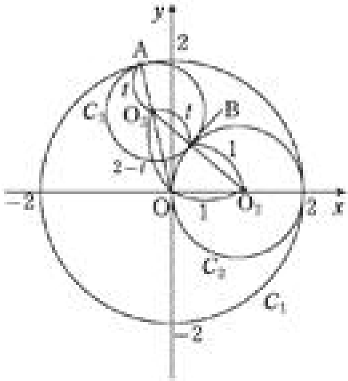
第1問

(1) C_2 の中心を O_2, C_3 の中心を O_3 とし, C_1 と C_3 の接点を A, C_2 と C_3 の接点を B とする.



O, O_3 および A は一直線上にあるので

$$\mathrm{OO}_3 = 2-t \qquad \cdots\cdots(ア)$$

$$\therefore\ a^2+b^2=(2-t)^2 \qquad \cdots\cdots①$$

また, O_2, B および O_3 は一直線上にあるので

$$\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3 = t+1 \qquad \cdots\cdots(イ)$$

$$\therefore\ (a-1)^2+b^2=(t+1)^2 \cdots\cdots②$$

①−②より

$$2a-1=-6t+3$$

$$\underline{\therefore\ a=-3t+2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

上式を①に代入すると

$$b^2=(2-t)^2-(-3t+2)^2$$

$$=-8t^2+8t \qquad \cdots\cdots(ウ)$$

$$\underline{\therefore\ b=\sqrt{-8t^2+8t}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(ア), (イ) および (ウ) がすべて正となる条件より

$$\underline{\therefore\ 0<t<1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $f(t)=b^2$ を考える.

$$f(t)=-8t^2+8t$$

$$=-8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2$$

$0<t<1$ より, $f(t)$ は $t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 2 をとる.

このとき, $b>0$ より b も最大値をとる.

よって, b の最大値は $\underline{\sqrt{2}}$ $\qquad \cdots\cdots$(答)

第２問

(1) ${}_m\mathrm{C}_1 = m$, かつ m は素数なので,

$$d_m = 1 \text{ または } m$$

$1 \leqq k \leqq m-1$ に対して

$${}_m\mathrm{C}_k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$\therefore\ m! = {}_m\mathrm{C}_k \cdot k!(m-k)!$$

左辺は m の倍数より, 右辺も m の倍数であるが,

$$\begin{cases} 1 \leqq k \leqq m-1,\ 1 \leqq m-k \leqq m-1 \\ m \text{ は素数} \end{cases}$$

であることより, $k!(m-k)!$ は m で割り切れない.

よって, 再び m が素数であることより, ${}_m\mathrm{C}_k$ は m の倍数である.

以上より, $d_m = m$ ■

(2) 自然数 k に対し, 命題

$$\mathrm{P}_k : k^m - k \text{ が } d_m \text{ で割り切れる}$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示す.

(i) $k=1$ のとき

$1^m - 1 = 0$ より, P_1 は成立する.

(ii) $k=l$ (l は自然数) のとき, P_l が成り立つとする. すなわち

$$l^m - l \text{ が } d_m \text{ で割り切れる}$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned}(l+1)^m - (l+1) &= \sum_{i=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_i l^i - (l+1) \\ &= (l^m+1) + \sum_{i=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_i l^i - (l+1) \\ &= l^m - l + \sum_{i=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_i l^i\end{aligned}$$

ここで, 仮定より $l^m - l$ は d_m で割り切れ, また d_m は ${}_m\mathrm{C}_i$ $(i=1, 2, \cdots, m-1)$ の最大公約数なので, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_i l^i$ も d_m で割り切れる.

以上より, $k = l+1$ についても P_{l+1} が成り立つ.

(i), (ii) より, 数学的帰納法より題意が示された. ■

第3問

(1) (A)を5回行ってLに4色すべての玉が入る確率を考える．

玉の選び方は，1色だけ2つ必要になるので4通り．

玉の出る順は

$$ {}_5C_2 \times 3! = 60 \text{ (通り)} $$

よって，

$$ \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times 4 \times 60 = \frac{15}{64} $$

R でも同様なので

$$ P_1 = \left(\frac{15}{64}\right)^2 = \underline{\frac{225}{4096}} \quad \cdots\cdots \text{(答)} $$

(2) (1)の前半と同じことなので

$$ P_2 = \underline{\frac{15}{64}} \quad \cdots\cdots \text{(答)} $$

(3) 題意が成立するためには，10回玉が選ばれる中で各色の玉が最低2回ずつ選ばれればよい．よって，その8個(4色×2回)の玉とそれ以外の2個の玉の並べ方を考えればよい．

(i) 残りの2個の玉がともに赤の場合

その並べ方は

$$ \frac{10!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} \text{ (通り)} $$

残りの2個の玉の色が同じ場合は，その色が4種類あることを考えて

$$ \frac{10!}{24\cdot 8} \times 4 \text{ (通り)} $$

(ii) 残りの2個の玉が赤と青の場合

その並べ方は

$$ \frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!} \text{ (通り)} $$

残りの2個の玉の色が異なる場合，その色の選び方は

$$ {}_4C_2 = 6 \text{ (通り)} $$

よって

$$ \frac{10!}{36\cdot 4} \times 6 \text{ (通り)} $$

以上より，題意が成立するための全場合の数は

$$ \frac{10!}{24\cdot 8} \times 4 + \frac{10!}{36\cdot 4} \times 6 = \frac{10!}{16} $$

したがって

$$ P_3 = \frac{10!}{16} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{10!}{4^{12}} $$

よって

$$ \frac{P_3}{P_1} = \frac{10!}{4^{12}} \times \left(\frac{64}{15}\right)^2 = \underline{\frac{63}{16}} \quad \cdots\cdots \text{(答)} $$

第 4 問

$$f'(x)=2ax+b$$

より

$$S=\int_0^2 |2ax+b|\,dx$$

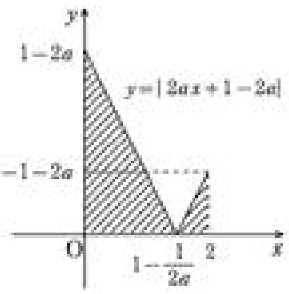
(1)

$$\begin{cases} f(0)=c=0 \\ f(2)=4a+2b+c=2 \end{cases}$$

よって, $b=1-2a$

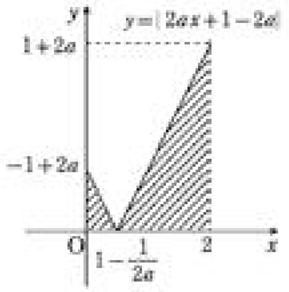
$$\therefore\ S=\int_0^2 |2ax+1-2a|\,dx$$

(i) $a \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき



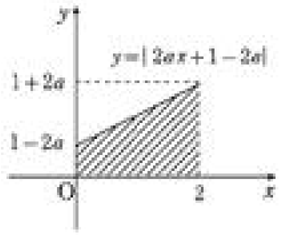
$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}(1-2a)\left(1-\frac{1}{2a}\right) \\ &\quad+\frac{1}{2}(-1-2a)\left(1+\frac{1}{2a}\right) \\ &=-2a-\frac{1}{2a} \end{aligned}$$

(ii) $a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき



$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}(-1+2a)\left(1-\frac{1}{2a}\right) \\ &\quad+\frac{1}{2}(1+2a)\left(1+\frac{1}{2a}\right) \\ &=2a+\frac{1}{2a} \end{aligned}$$

(iii) $-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき



$$\begin{aligned} S&=\frac{\{(1-2a)+(1+2a)\}\cdot 2}{2} \\ &=2 \end{aligned}$$

以上より

$$S=\begin{cases} -2a-\dfrac{1}{2a} & \left(a \leqq -\dfrac{1}{2}\right) \\ 2 & \left(-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ 2a+\dfrac{1}{2a} & \left(a \geqq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

……(答)

(2) S は a の偶関数であるので, $a \geqq 0$ の範囲で考える.

$a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき, 相加平均・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} S&=2a+\frac{1}{2a} \\ &\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}} \\ &=2 \end{aligned}$$

一方, $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $S=2$ であることから,

S の最小値は $\underline{2}$ ……(答)