第1問

(1)

${}_m\mathrm{C}_1 = m$ かつ m は素数なので，

$$d_m = 1 \quad \text{または} \quad m$$

$1 \leqq k \leqq m-1$ に対して，

$$ {}_m\mathrm{C}_k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$\therefore m! = {}_m\mathrm{C}_k \cdot k!(m-k)!$$

左辺は m の倍数であるから，右辺も m の倍数であるが，

$$\begin{cases} 1 \leqq k\,,\ 1 \leqq m-k \leqq m-1 \\ m\text{は素数} \end{cases}$$

であることより，$k!(m-k)!$ は m で割り切れない。よって，再び m が素数であることより，${}_m\mathrm{C}_k$ は m の倍数である。以上より，

$$d_m = m$$

である。

(証明終)

(2)

自然数 k に対して，命題

$\mathrm{P}_k : k^m - k$ が d_m で割り切れる。

が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

(ⅰ) $k=1$ のとき，

$$1^m - 1 = 0$$

より，P_1 は成立する。

(ⅱ) $k = l$ (l は自然数)のとき P_l が成り立つと仮定する。すなわち

$l^m - l$ が d_m で割り切れる

とする。このとき，

$$\begin{aligned}(l+1)^m - (l+1) &= \sum_{i=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_i l^i - (l+1) \\ &= \left(l^m + 1\right) + \sum_{i=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_i - (l+1) \\ &= l^m - l + \sum_{i=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_i l^i\end{aligned}$$

ここで，仮定より，$l^m - l$ は d_m で割り切れ，また d_m は ${}_m\mathrm{C}_i\ (i = 1, 2, \cdots m-1)$ の最大公約数なので，$\sum_{i=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_i l^i$ も d_m で割り切れる。以上より，$k = l+1$ についても P_{l+1} が成り立つ。

(ⅰ), (ⅱ)より，数学的帰納法により題意が示された。

(証明終)

(3)

m が偶数の時，$k = d_m - 1$ に対して，

$$\begin{aligned}k^m - k &= (d_m - 1)^m - (d_m - 1) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i\, {d_m}^{m-i} + (-1)^m - d_m + 1 \\ &= d_m\left(\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i\, {d_m}^{m-i-1} - 1\right) + 2\end{aligned}$$

ここで，(2)の結果より，左辺は d_m で割り切れるので，2 も d_m で割り切れる。したがって，d_m は 1 または 2 である。

(証明終)

第 2 問

(1)

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix}r\\1\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}r\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sr\\s\end{pmatrix}$$

なので,

$$\begin{aligned}B&=\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-r\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&sr\\c&s\end{pmatrix}\\&=\underline{\begin{pmatrix}a-rc&0\\c&s\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}z_n\\w_n\end{pmatrix}&=B^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\left\{\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}\right\}^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}^{-1}A^n\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}^{-1}A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-r\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x_n-ry_n\\y_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，条件 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}w_n=0$$

(証明終)

(3)

$a'=a-cr$ とおくと，

$$B=\begin{pmatrix}a'&0\\c&s\end{pmatrix}$$

ここで，帰納的に，

$$B^n=\begin{pmatrix}(a')^n&0\\c\left\{(a')^{n-1}+(a')^{n-2}\cdot s+\cdots+s^{n-1}\right\}&s^n\end{pmatrix}$$

となることが分かるので，

$$\begin{pmatrix}z_n\\w_n\end{pmatrix}=B^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a')^n\\c\left\{(a')^{n-1}+(a')^{n-2}\cdot s+\cdots+s^{n-1}\right\}\end{pmatrix}$$

が成り立つ。(2)より，$\lim_{n\to\infty}z_n=0$ なので，

$$|a'|<1$$

である。また，$s>1$ より $a'\neq s$ なので，

$$w_n=c\cdot\frac{(a')^n-s^n}{a'-s}$$

となる。$\lim_{n\to\infty}(a')^n=0,\ \lim_{n\to\infty}s^n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}w_n=0$ より，

$$c=0$$

よって，$a'=a$ となるので，

$$|a|=|a'|<1$$

以上より，$c=0$ かつ $|a|<1$ が示された。

(証明終)

第 3 問

(1)

(A)を 5 回行って L に 4 色すべての玉が入る確率を考える。玉の選び方は, 1 色だけ 2 つ必要になるので, 4 通り。また, 玉の出る順は,

$$ {}_5C_2 \cdot 3! = 60 \quad [\text{通り}] $$

よって,

$$ \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot 4 \cdot 60 = \frac{15}{64} $$

R についても同様なので,

$$ P_1 = \left(\frac{15}{64}\right)^2 = \underline{\frac{225}{4096}} $$

(2)

(1)の前半と同じことなので,

$$ P_2 = \underline{\frac{15}{64}} $$

(3)

題意が成立するためには, 10 回玉が選ばれる中で各色の玉が最低 2 回ずつ選ばれればよい。したがって, その 8 個(4 色×2 回)の玉とそれ以外の 2 個の玉の並べ方を考えればよい。

(ⅰ)残りの 2 個の玉がともに赤の場合,

その並べ方は,

$$ \frac{10!}{4!\,2!\,2!\,2!} \quad [\text{通り}] $$

残りの 2 個の玉の色が同じである場合は, その色が 4 種類あることを考えて,

$$ \frac{10!}{24 \cdot 8} \cdot 4 \quad [\text{通り}] $$

(ⅱ)残りの 2 個の玉が赤と青の場合,

その並べ方は,

$$ \frac{10!}{3!\,3!\,2!\,2!} \quad [\text{通り}] $$

残りの 2 個の玉の色が異なる場合, その色の選び方は,

$$ {}_4C_2 = 6 $$

よって,

$$ \frac{10!}{36 \cdot 4} \cdot 6 \quad [\text{通り}] $$

以上より, 題意が成立するための全場合の数は,

$$ \frac{10!}{24 \cdot 8} \cdot 4 + \frac{10!}{36 \cdot 4} \cdot 6 = \frac{10!}{16} $$

したがって,

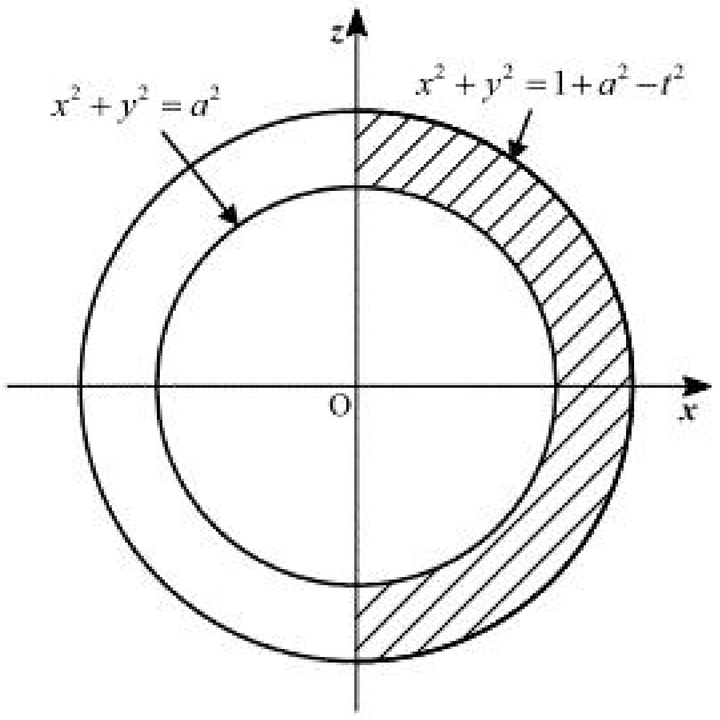
$$ P_3 = \frac{10!}{16} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{10!}{4^{12}} $$

よって,

$$ \frac{P_3}{P_1} = \frac{10!}{4^{12}} \cdot \left(\frac{64}{15}\right)^2 = \underline{\frac{63}{16}} $$

第 4 問

(1)



$-1 \leqq t \leqq 1$ に対し，平面 $y=t$ での $W(a)$ の断面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\frac{1}{2}\pi\left\{\left(\sqrt{1+a^2-t^2}\right)^2-a^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\pi\left(1-t^2\right)$$

したがって，

$$W(a)=\int_{-1}^{1}S(t)\,dt$$
$$=2\int_0^1\frac{1}{2}\pi\left(1-t^2\right)dt$$
$$=\pi\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=\underline{\frac{2}{3}\pi}$$

(2)

E と $\{(x,\ y,\ z)\,|\,x \leqq 0\}$ との共通部分の体積を $W'(a)$ とすると，

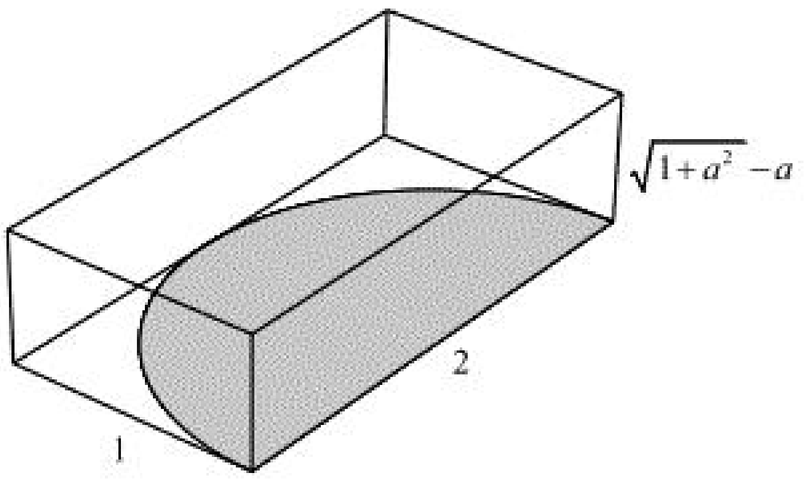
$$0<W'(a)<2\cdot 2\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)$$
$$\lim_{a\to\infty}2\cdot 2\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)=\lim_{a\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+a^2}+a}=0$$

したがって，はさみうちの原理より，

$$\lim_{a\to\infty}W'(a)=0$$

よって，

$$\lim_{a\to\infty}V(a)=\lim_{a\to\infty}\{W(a)+W'(a)\}=\underline{\frac{2}{3}\pi}$$



(E の $x \leqq 0$，$z \geqq 0$ の部分)

第 5 問

(1)

$1-x>0$ より,

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow 1-x<(1-x)^{\frac{1}{x}}(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1-x^2)^{\frac{1}{x}} \quad \cdots ①$$

$$\Leftrightarrow \log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1-x^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\log(1-x)>\log(1-x^2),\ -1<x<0 & \cdots ② \\ x\log(1-x)<\log(1-)x^2,\ 0<x<1 & \cdots ③ \end{cases}$$

ここで, $f(x)=\log(1-x^2)-x\log(1-x)$ とおくと,

$$f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}-\log(1-x)+\frac{x}{1-x}$$
$$=-\frac{x}{1+x}-\log(1-x)$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}$$
$$=\frac{x(x+3)}{(1-x)(1+x)^2}$$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

したがって,

$$\begin{cases} -1<x<0 \text{ のとき } f(x)<0 \text{ より, ②が成立する。} \\ 0<x<1 \text{ のとき } f(x)>0 \text{ より, ③が成立する。} \end{cases}$$

以上より, 題意が示された。

(証明終)

(2)

①に $x=0.01$ を代入すると,

$$0.99<0.9999^{100}$$

一方,

$$x+1=(1+x)^{\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}$$
$$>(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1++x)^{1-\frac{1}{x}}$$
$$=(1-x^2)^{1-\frac{1}{x}}$$

が成り立つので, これに $x=-0.01$ を代入すると,

$$0.99>0.9999^{101}$$

以上より, 題意が示された。

(証明終)

第 6 問

(1)

$$d\left(\mathrm{P}_1(t),\mathrm{P}_2(t)\right)=\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1(t)\mathrm{P}_2(t)}\right|$$

である。また，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{P}_1(t)\mathrm{P}_2(t)}&=-\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{P}_1(t)}+\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}+\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2(t)}\\&=-t\vec{e}_1+\vec{a}_1+t\vec{e}_2\\&=-t\left(\vec{e}_1-\vec{e}_2\right)+\vec{a}_1\end{aligned}$$

であるので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1(t)\mathrm{P}_2(t)}\right|^2=\left|\vec{e}_1-\vec{e}_2\right|^2t^2-2\left(\vec{e}_1-\vec{e}_2\right)\cdot\vec{a}_1t+\left|\vec{a}_1\right|^2$$

となる。ここで，

$$f(t)=\left|\vec{e}_1-\vec{e}_2\right|^2-2\left(\vec{e}_1-\vec{e}_2\right)\cdot\vec{a}_1t+\left|\vec{a}_1\right|^2-1$$

とおくと，ある時刻 t で $d\left(\mathrm{P}_1(t),\mathrm{P}_2(t)\right)\leqq 1$ が成立するならば，$f(t)\leqq 0$ となる $t\geqq 0$ が存在する。したがって，$f(t)=0$ の判別式を D とおくと，

$$\frac{D}{4}=\left\{\left(\vec{e}_1-\vec{e}_2\right)\cdot\vec{a}_1\right\}^2-\left|\vec{e}_1-\vec{e}_2\right|^2\left(\left|\vec{a}_1\right|^2-1\right)$$

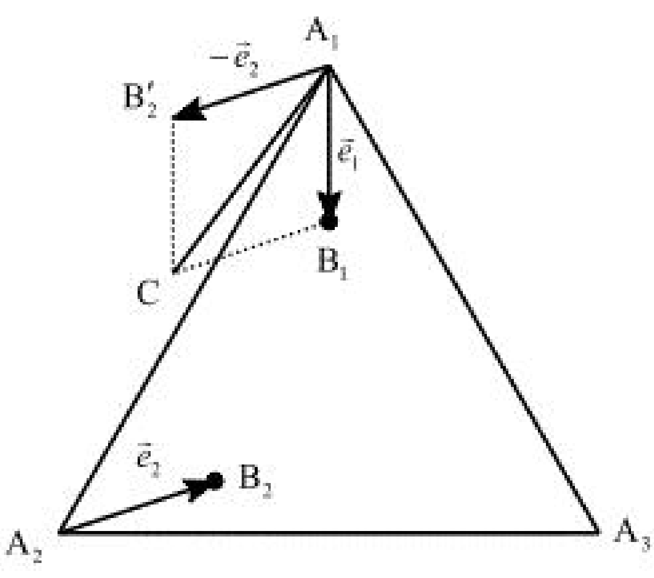
$$=-\left|\vec{e}_1-\vec{e}_2\right|^2\left|\vec{a}_1\right|^2\left(\sin^2\theta-\frac{1}{\left|\vec{a}_1\right|^2}\right)\geqq 0$$

よって，

$$\left|\sin\theta\right|\leqq\frac{1}{\left|\vec{a}_1\right|}=\frac{1}{1000}$$

(証明終)

(2)



上図より，

$$\angle\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2'=\angle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2=\frac{\pi}{3}-\theta_2$$

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{C}&=\frac{1}{2}\angle\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2'\\&=\frac{1}{2}\left(\angle\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2'+\theta_1\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2+\theta_1\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\theta=\left|\angle\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{C}-\theta_1\right|=\left|\frac{\pi}{6}-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right|$$

また，$0<\theta_1<\dfrac{\pi}{3},\ 0<\theta_2<\dfrac{\pi}{3}$ なので，

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$$

となる。いま，(1)の結果より，

$$\left|\sin\theta\right|\leqq\frac{1}{1000}=\sin\alpha$$

および $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の仮定からから，

$$\theta\leqq\alpha$$

であることがわかる。以上より，

$$\left|\frac{\pi}{6}-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right|=\theta\leqq\alpha$$

$$\therefore\quad \underline{-2\alpha+\frac{\pi}{3}\leqq\theta_1+\theta_2\leqq 2\alpha+\frac{\pi}{3}}$$

(3)

(1), (2)より，

$$\begin{cases}-2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta_1+\theta_2\leqq 2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\\[2mm]-2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta_2+\theta_3\leqq 2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\\[2mm]-2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta_3+\theta_1\leqq 2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

が成り立つ。いま，

$$\theta_1-\frac{\pi}{6}=\theta_1',\ \theta_2-\frac{\pi}{6}=\theta_2',\ \theta_3-\frac{\pi}{6}=\theta_3'$$

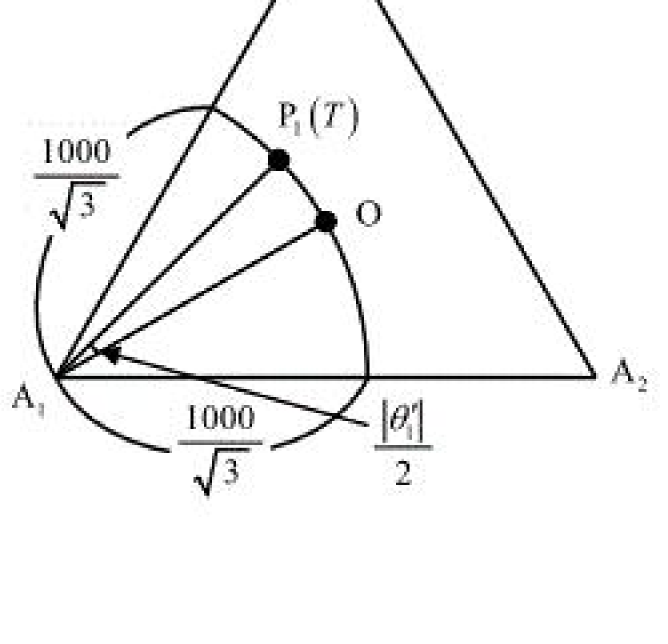
とおくと，

$$\begin{cases}-2\alpha\leqq\theta_1'+\theta_2'\leqq 2\alpha & \cdots① \\ -2\alpha\leqq\theta_2'+\theta_3'\leqq 2\alpha & \cdots② \\ -2\alpha\leqq\theta_3'+\theta_1'\leqq 2\alpha & \cdots③\end{cases}$$

となり，①−②+③より，

$$-6\alpha\leqq 2\theta_1'\leqq 6\alpha$$

$$\therefore\left|\theta_1'\right|\leqq 3\alpha$$



よって，上図より，

$$\begin{aligned}d\left(\mathrm{P}_1(T),\mathrm{O}\right)&=2\cdot\frac{1000}{\sqrt{3}}\sin\frac{\left|\theta_1'\right|}{2}\\&\leqq 2\cdot\frac{1000}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\left|\theta_1'\right|}{2}\\&\leqq 1000\sqrt{3}\alpha\end{aligned}$$

ここで，

$$\sin x>\frac{2}{\pi}x\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

より，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ なので，

$$\alpha<\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\frac{\pi}{2000}$$

が成り立つ。以上より，

$$d\left(\mathrm{P}_1(T),\mathrm{O}\right)\leqq 1000\sqrt{3}\alpha<\frac{\sqrt{3}\pi}{2}<3$$

同様にして，

$$d\left(\mathrm{P}_2(T),\mathrm{O}\right)\leqq 3,\ \ d\left(\mathrm{P}_3(T),\mathrm{O}\right)\leqq 3$$

が示されるので，題意が示された。

(証明終)