第 1 問

A

成分 $A_1, \cdots, A_n$ の重さの比率に関する条件を

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$0 \leqq p_k \leqq 1,\ k = 1, \cdots, n \qquad \cdots\cdots ②$$

また，単位重量あたりの価格に関する条件を

$$x_k < x_{k+1},\ k = 1, \cdots, n-1 \qquad \cdots\cdots ③$$

とする．

(A−1)

③より

$$x_k > x_1,\ k = 2, \cdots, n$$

が成り立つので，②より

$$x_k p_k \geqq x_1 p_k,\ k = 1, \cdots, n$$

となる．よって

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \\ &\geqq \sum_{k=1}^{n} x_1 p_k \\ &= x_1 \sum_{k=1}^{n} p_k \\ &= x_1 \quad (\because\ ①より) \end{aligned}$$

ここで

$$p_1 = 1,\ p_k = 0,\ k = 2, \cdots, n$$

とすると，これらは①および②を満たし，このとき

$$v = x_1$$

よって，このとき v は最小値 x_1 をとることがわかる．

また，①，②を満たす p_k について，ある $l = 2, \cdots, n$ に対して $p_l > 0$ であれば，

$$x_l p_l > x_1 p_l$$

であるので

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k > \sum_{k=1}^{n} x_1 p_k = x_1$$

よって，このとき v は最小値をとらないことがわかる．

以上より，v は

$$p_1 = 1,\ p_k = 0,\ k = 2, \cdots, n \qquad \cdots\cdots (答)$$

のとき，またこのときに限り，最小となる．

(A−2)

別の重さの比率に関する条件を

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = 1 \qquad \cdots\cdots ④$$

また，これらの重さの比率の間に成り立つ条件を

$$\sum_{k=1}^{m} p_k \leqq \sum_{k=1}^{m} q_k,\ m = 1, \cdots, n-1 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

とする．

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} p_k,\ m = 1, \cdots, n$$

$$t_m = \sum_{k=1}^{m} q_k,\ m = 1, \cdots, n$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_k p_k &= x_1 p_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k (s_k - s_{k-1}) \\ &= \left(x_1 p_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k s_k\right) - \sum_{k=2}^{n} x_k s_{k-1} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k s_k + x_n s_n\right) - \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} s_k \\ &= x_n s_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) s_k \qquad \cdots\cdots ⑥ \end{aligned}$$

同様に

$$\sum_{k=1}^{n} x_k q_k = x_n t_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) t_k$$

が成り立つ．ここで，①，④より

$$s_n = t_n = 1$$

であるので，③，⑤より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_k p_k - \sum_{k=1}^{n} x_k q_k &= x_n (s_n - t_n) - \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(s_k - t_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(t_k - s_k) \geqq 0 \end{aligned}$$

以上より題意が示された． ■

【参考】⑥の式変形はアーベルの変形と呼ばれている．

これは，積分法における部分積分

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

に相当する．

(A−3)

$n = 3$ のときの条件を

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \qquad \cdots\cdots ①'$$

$$0 \leqq p_k \leqq 1,\ k = 1, 2, 3 \qquad \cdots\cdots ②'$$

および

$$p_1 \geqq p_3 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

$$p_2 \geqq p_3 \qquad \cdots\cdots ⑧$$

とおく．このとき，①′，⑦より

$$p_1 \geqq p_3 = 1 - p_1 - p_2$$

$$\therefore\ 2p_1 + p_2 \geqq 1 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

また，①′，⑧より

$$p_2 \geqq p_3 = 1 - p_1 - p_2$$

$$\therefore\ p_1 + 2p_2 \geqq 1 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

さらに，①′，②′より

$$1 - p_1 - p_2 = p_3 \geqq 0$$

$$\therefore\ p_1 + p_2 \leqq 1 \qquad \cdots\cdots ⑪$$

がそれぞれ得られる．

逆に，⑨−⑪より $p_1 \geqq 0$，⑩−⑪より $p_2 \geqq 0$，①′および⑪より $p_3 = 1 - p_1 - p_2 \geqq 0$ が成り立ち，またこれらと①′より

$$p_k \leqq p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ k = 1, 2, 3$$

が成り立つ．さらに，①′，⑨より

$$p_1 \geqq 1 - p_1 - p_2 = p_3$$

①′，⑩より

$$p_2 \geqq 1 - p_1 - p_2 = p_3$$

が成り立つ．

以上より，①′，②′，⑦および⑧は，①′，⑨，⑩および⑪と同値である．したがって，⑨，⑩および⑪のもとで，p_1, p_2 の関数

$$\begin{aligned} v &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 (1 - p_1 - p_2) \\ &= -(x_3 - x_1) p_1 - (x_3 - x_2) p_2 + x_3 \end{aligned}$$

の最大値問題を考えればよい．ただし，x_1, x_2, x_3 は

$$x_1 < x_2 < x_3$$

を満たす定数である．

そこで，$p_1 p_2$ 平面上の直線

$$C_v : p_2 = -\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} p_1 + \frac{x_3 - v}{x_3 - x_2}$$

が，領域⑨かつ⑩かつ⑪（これを D とおく）と交わりながら変化するとき，v の取り得る値の最大値を求める．ここで，

$$v : 最大 \iff \frac{x_3 - v}{x_3 - x_2}\ (C_v の\ p_2\ 切片) : 最小$$

に注意する．

$x_1 < x_2$ より

$$x_3 - x_1 > x_3 - x_2$$

$$\therefore\ -\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} < -1$$

である．

i）$-\dfrac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} < -2$ のとき

（すなわち，$x_1 - 2x_2 + x_3 < 0$ のとき）

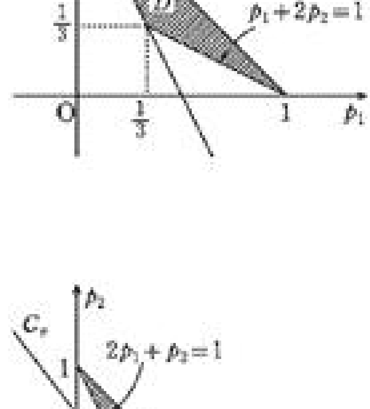
C_v が点 $(0, 1)$ を通るとき

p_2 切片が最小となる．すなわち

$$p_1 = 0,\ p_2 = 1,\ p_3 = 0$$

のとき，v が最大となる．

（v の最大値は x_2）



ii）$-\dfrac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = -2$ のとき

（すなわち，$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ のとき）

C_v が直線 $y = 1 - 2x$ と重なるとき

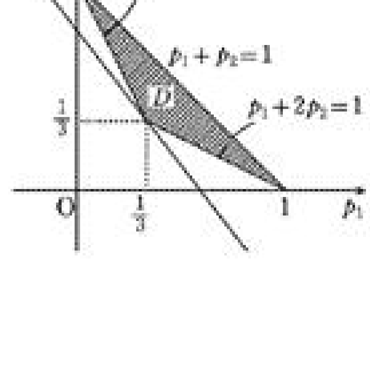
p_2 切片が最小となる．すなわち

$$p_1 = t,\ p_2 = 1 - 2t,\ p_3 = t$$

$$\left(ただし，0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}\right)$$

のとき，v が最大となる．

（v の最大値は x_2）



iii）$-2 < -\dfrac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} < -1$ のとき

（すなわち，$x_1 - 2x_2 + x_3 > 0$ のとき）

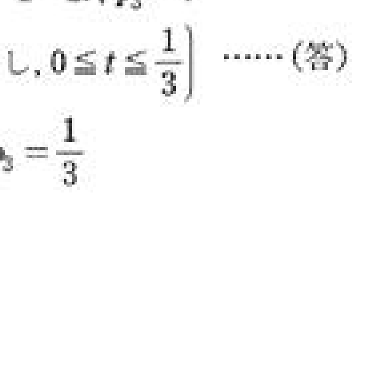
C_v が点 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ を通るとき

p_2 切片が最小となる．すなわち

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$$

のとき，v が最大となる．

$\left(v\ の最大値は\ \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$



以上より，v が最大となるのは

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 < 0\ のとき\quad p_1 = 0,\ p_2 = 1,\ p_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\ のとき\quad p_1 = t,\ p_2 = 1 - 2t,\ p_3 = t \\ \qquad\qquad \left(ただし，0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}\right) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 > 0\ のとき\quad p_1 = p_2 = p_3 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad \cdots\cdots (答)$$

B

(B−1)

長さ $n+1$ の列を 1 回送るときに誤って伝わる数字の個数が偶数個であるのは，次の i）または ii）の場合である．

i）はじめの長さ n の部分の中の偶数個の数字が誤って伝わり，かつ $n+1$ 番目の数字が正しく伝わる

ii）はじめの長さ n の部分の中の奇数個の数字が誤って伝わり，かつ $n+1$ 番目の数字が誤って伝わる

長さ n の列を 1 回送るときに誤って伝わる数字の個数が奇数個である確率は $1 - P(n)$ であることから，

$$\begin{aligned} P(n+1) &= P(n) \times (1 - p) + \{1 - P(n)\} \times p \\ &= (1 - 2p) P(n) + p \qquad \cdots\cdots (答) \end{aligned}$$

(B−2)

1 つの文字を 1 回送って正しく伝わる確率は $1 - p$ であるから

$$P(1) = 1 - p$$

である．ここで B−1 の結果より

$$P(n+1) - \frac{1}{2} = (1 - 2p)\left\{P(n) - \frac{1}{2}\right\}$$

が成り立つので，数列 $\left\{P(n) - \dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $\dfrac{1-2p}{2}$，公比 $1 - 2p$ の等比数列である．したがって，

$$P(n) - \frac{1}{2} = \frac{(1-2p)^n}{2}$$

よって

$$P(n) = \frac{1 + (1-2p)^n}{2} \qquad \cdots\cdots (答)$$

(B−3)

n 個の数字からなるデータを送るとき，入れ替わる数字の個数が偶数個であれば，送信データと受信データの中の 1 の個数の偶奇は変わらない．逆に入れ替わる数字の個数が奇数個であれば，送信データと受信データの中の 1 の個数の偶奇は入れ替わる．

受信者 B が A に再送を要求するのは，

i）長さ n のデータのうち偶数個が入れ替わり，かつパリティビットが入れ替わる

ii）長さ n のデータのうち奇数個が入れ替わり，かつパリティビットが入れ替わらない

このどちらか一方である．したがって，求める確率は

$$\begin{aligned} P(n) \times p + \{1 - P(n)\} \times (1 - p) &= (2p - 1) P(n) + 1 - p \\ &= \frac{1 - (1-2p)^{n+1}}{2} \qquad \cdots\cdots (答) \end{aligned}$$

(B−4)

$\alpha = \dfrac{1 - (1-2p)^{n+1}}{2}$ とする．

$k = 1, 2, \cdots$ に対し，$n+1$ 個の数字からなる列を k 回送信して通信が終了する確率は，B−3 の結果より

$$\alpha^{k-1}(1 - \alpha)$$

したがって，求める期待値 E は

$$E = \lim_{k \to \infty} \sum_{l=1}^{k} (n+1) l \cdot \alpha^{l-1} (1 - \alpha) = (n+1)(1 - \alpha) \lim_{k \to \infty} \sum_{l=1}^{k} l \alpha^{l-1}$$

ここで，数列 $S_k = \sum_{l=1}^{k} l \alpha^{l-1}$ は

$$\begin{aligned} S_k &= 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \cdots + k\alpha^{k-1} \\ -)\ \alpha S_k &= \qquad \alpha + 2\alpha^2 + \cdots + (k-1)\alpha^{k-1} + k\alpha^k \\ \hline (1 - \alpha) S_k &= 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{k-1} - k\alpha^k \\ &= \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} - k\alpha^k \end{aligned}$$

$$\therefore\ S_k = \frac{1 - \alpha^k}{(1 - \alpha)^2} - \frac{k\alpha^k}{1 - \alpha}$$

いま，仮定より $0 \leqq p < 1$ であるので

$$-1 < 1 - 2p \leqq 1$$

$$-1 < (1-2p)^{n+1} \leqq 1$$

$$0 \leqq \frac{1 - (1-2p)^{n+1}}{2} < 1$$

$$\therefore\ 0 \leqq \alpha < 1$$

ゆえに

$$\lim_{k \to \infty} \alpha^k = 0$$

また，$0 < \alpha < 1$ ならば $\dfrac{1}{\alpha} > 1$ なので，$\dfrac{1}{\alpha} - 1 = \beta\ (> 0)$ とおくと

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k = (1 + \beta)^k > \frac{k(k-1)}{2} \beta^2$$

$$\therefore\ 0 < k\alpha^k < \frac{2}{(k-1)\beta^2} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

したがって，はさみうちの原理より

$$\lim_{k \to \infty} k\alpha^k = 0$$

以上より

$$\begin{aligned} E &= (n+1)(1 - \alpha) \lim_{k \to \infty} \left\{\frac{1 - \alpha^k}{(1 - \alpha)^2} - \frac{k\alpha^k}{1 - \alpha}\right\} \\ &= \frac{n+1}{1 - \alpha} \\ &= \frac{2(n+1)}{1 + (1-2p)^{n+1}} \qquad \cdots\cdots (答) \end{aligned}$$

第２問

A

数列 $\{b_n\}$ の定義式および漸化式をそれぞれ

$$b_n = a_{n+1} - a_n,\ n=1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots①$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{{a_n}^2},\ n=1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots②$$

とする．

(A−1)

$n=1$ のとき，仮定より $a_1=1$ なので成立する．

$n \geqq 2$ のとき

仮定より $b_1=1$ なので，② より

$$b_k = b_1 + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{{a_l}^2} > b_1 = 1,\ k=2, \cdots, n$$

したがって

$$b_k \geqq 1,\ k=1, \cdots, n$$

ゆえに，① より

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \geqq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n,\ n=2, 3, \cdots$$

よって成立する．

以上より，$n=1, 2, \cdots$ について題意が成立する． ■

(A−2)

$n=1$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 < 2$$

より成立する．

$n \geqq 2$ のとき

$k=2, \cdots, n$ に対して

$$k^2 > k(k-1)$$

であるので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &< 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &< 2\end{aligned}$$

よって成立する．

以上より，すべての自然数 n について題意が成立する． ■

【参考】

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (=1.6449\cdots)$$

であることが知られている．

(A−3)

$n=1, 2$ のとき，

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + b_1 = 2$$

より成立する．

$n \geqq 3$ のとき

$k=2, \cdots, n-1$ に対して

$$\begin{aligned}b_k &= b_1 + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{{a_l}^2} \quad (\because ② より) \\ &\leqq 1 + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l^2} \quad (\because \text{A−1} より) \\ &< 1+2 \quad (\because \text{A−2} より) \\ &= 3\end{aligned}$$

したがって，① より

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &< a_1 + b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} 3 \\ &= 3n-4 < 3n-2\end{aligned}$$

よって成立する．

以上より，すべての自然数 n について題意が成立する． ■

(A−4)

関数 $v(t)$ の定義式および関数 $f(t)$ との関係式をそれぞれ

$$v(t) = f'(t) \qquad \cdots\cdots③$$

$$v'(t) = \frac{1}{f(t)^2} \qquad \cdots\cdots④$$

とする．

仮定より $t \geqq 0$ なので，④ より

$$\begin{aligned}v(t) &= v(0) + \int_0^t \frac{1}{f(u)^2} du \\ &\geqq v(0) = 1\end{aligned}$$

したがって，③ より

$$\begin{aligned}f(t) &= f(0) + \int_0^t v(u) du \\ &\geqq f(0) + \int_0^t du \\ &= 1+t\end{aligned}$$ ■

(A−5)

$t \geqq 0$ より，④ および A−4 の結果を用いて

$$\begin{aligned}v(t) &= v(0) + \int_0^t \frac{1}{f(u)^2} du \\ &\leqq v(0) + \int_0^t \frac{1}{(1+u)^2} du \\ &= 1 + \left[-\frac{1}{1+u}\right]_0^t \\ &= 2 - \frac{1}{1+t}\end{aligned}$$

したがって，③ より

$$\begin{aligned}f(t) &= f(0) + \int_0^t v(u) du \\ &\leqq f(0) + \int_0^t \left(2 - \frac{1}{1+u}\right) du \\ &= 1 + \left[2u - \log(1+u)\right]_0^t \\ &= 1 + 2t - \log(1+t)\end{aligned}$$ ■

B

(B−1)

壁に垂直に，壁から離れる方向を x 軸正の向きに，また水平面に垂直に上向きの方向を y 軸正の向きとする．このとき

$$\vec{a}_{\mathrm{i}} = \left(-t_{\mathrm{i}} \cos\theta_{\mathrm{i}},\ -t_{\mathrm{i}} \sin\theta_{\mathrm{i}}\right)$$

$$\vec{a}_{\mathrm{i}+1} = \left(t_{\mathrm{i}+1} \cos\theta_{\mathrm{i}+1},\ t_{\mathrm{i}+1} \sin\theta_{\mathrm{i}+1}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\vec{b} = (0,\ -mg)$$

(B−2)

x 軸方向のつり合いの条件より

$$-t_{\mathrm{i}} \cos\theta_{\mathrm{i}} + t_{\mathrm{i}+1} \cos\theta_{\mathrm{i}+1} = 0 \qquad \cdots\cdots①$$

および，y 軸方向のつり合いの条件より

$$-t_{\mathrm{i}} \sin\theta_{\mathrm{i}} + t_{\mathrm{i}+1} \sin\theta_{\mathrm{i}+1} - mg = 0 \qquad \cdots\cdots②$$

を得る．① より，$t_{\mathrm{i}} \cos\theta_{\mathrm{i}}$ は i によらずに等しい値であることがわかる．よって，仮定より $t_1 = T,\ \theta_1 = 0$ であるから

$$t_{\mathrm{i}} \cos\theta_{\mathrm{i}} = t_1 \cos\theta_1 = T$$

$$\therefore\ t_{\mathrm{i}} = \frac{T}{\cos\theta_{\mathrm{i}}}$$

これを ② に代入して

$$-\frac{T}{\cos\theta_{\mathrm{i}}} \sin\theta_{\mathrm{i}} + \frac{T}{\cos\theta_{\mathrm{i}+1}} \sin\theta_{\mathrm{i}+1} - mg = 0$$

$$\therefore\ \tan\theta_{\mathrm{i}+1} - \tan\theta_{\mathrm{i}} = \frac{mg}{T},\ \mathrm{i}=1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots(答)$$

(B−3)

$\theta_1 = 0$ より，$\tan\theta_1 = 0$

また，$\mathrm{i} \geqq 2$ に対して，B−2 の結果より

$$\tan\theta_{\mathrm{i}} = \tan\theta_1 + \sum_{k=1}^{\mathrm{i}-1} \frac{mg}{T} = \frac{mg}{T}(\mathrm{i}-1)$$

よって

$$\tan\theta_{\mathrm{i}} = \frac{mg}{T}(\mathrm{i}-1),\ \mathrm{i}=1, 2, \cdots$$

したがって，$0 \leqq \theta_{\mathrm{i}} < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta_{\mathrm{i}} \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned}\cos\theta_{\mathrm{i}} &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_{\mathrm{i}}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left\{\frac{mg}{T}(\mathrm{i}-1)\right\}^2}},\ \mathrm{i}=1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

(B−4)

$x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくと

$$x^2 + 1 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

ここで，$x=a$ のとき

$$a = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$e^{2t} - 2ae^t - 1 = 0$$

$$\therefore\ e^t = a + \sqrt{a^2+1} \quad (\because\ e^t > 0 より)$$

$$\therefore\ t = \log\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$$

したがって

$$t : 0 \to \log\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) \quad (x : 0 \to a)$$

であるので，

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \int_0^{\log\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)} \frac{1}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}} \cdot \frac{e^t+e^{-t}}{2} dt \\ &= \log\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

(B−5)

B−3 の結果より

$$\begin{aligned}X_n &= \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} l \cos\theta_{\mathrm{i}} \\ &= l \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left\{\frac{mg}{T}(\mathrm{i}-1)\right\}^2}} \\ &= \frac{L}{n} \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{Mg}{T} \cdot \frac{\mathrm{i}-1}{n}\right)^2}}\end{aligned}$$

したがって，区分求積法により

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{n\to\infty} X_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{L}{n} \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{Mg}{T} \cdot \frac{\mathrm{i}-1}{n}\right)^2}} \\ &= L \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{Mg}{T} y\right)^2}} dy \\ &= L \int_0^{\frac{Mg}{T}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{T}{Mg} dx \quad \left(\because\ \frac{Mg}{T} y = x\right) \\ &= \frac{LT}{Mg} \log \frac{Mg + \sqrt{M^2g^2+T^2}}{T} \quad (\because \text{B−4} の結果より)\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots(答)$$

【参考】本問のひもの形状は懸垂線と呼ばれている．

ひもの最下点を原点とし，B−1 の解答にあるように座標軸を定めると，ひもの形状は

$$y = \frac{LT}{Mg} \left(\frac{e^{\frac{Mg}{LT}x} + e^{-\frac{Mg}{LT}x}}{2} - 1\right)$$

で与えられることが知られている．