第１問

(1) (B の y 座標) $=-$(C の y 座標) となればよいので,

$$2\sin\theta=1\sin(120^\circ-\theta)$$

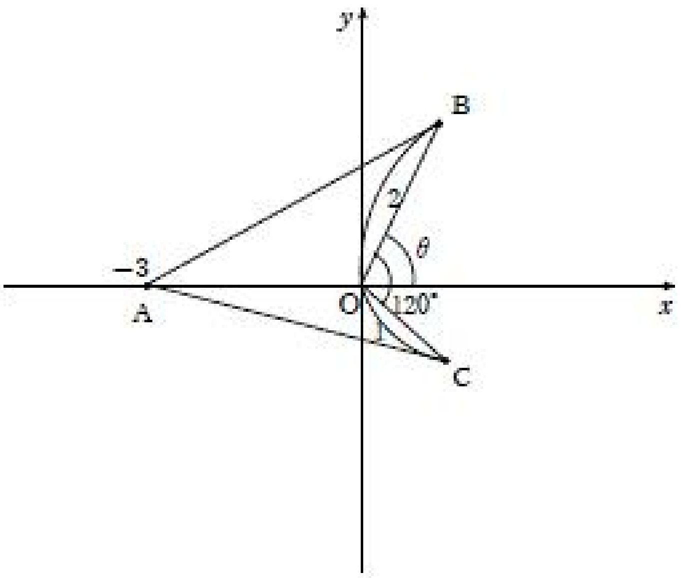
$$2\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\frac{3}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって, $0^\circ<\theta<120^\circ$ より,

$$\underline{\theta=30^\circ}$$



(2) $\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sin(120^\circ-\theta)$

$$=\frac{3}{2}(2\sin\theta+\sin(120^\circ-\theta))$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)$$

$$\left(ただし, \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \cos\alpha=\frac{5}{2\sqrt{7}}\right)$$

$0^\circ<\alpha<90^\circ$ より, $0^\circ<\theta+\alpha<210^\circ$ であるから,

$\theta+\alpha=90^\circ$ のとき　$\underline{最大値\ \frac{3\sqrt{7}}{2}}$ をとる

このとき,

$$\sin\theta=\sin(90^\circ-\alpha)$$

$$=\cos\alpha=\frac{5}{2\sqrt{7}}=\underline{\frac{5\sqrt{7}}{14}}$$

第２問

$$f(x+1)=(x+1)^2+a(x+1)+b$$
$$=x^2+(2+a)x+(a+b+1) \quad \cdots\cdots Ⓐ$$

$$c\int_0^1 (3x+4xt)f'(t)dt$$
$$=c\int_0^1 \{8xt^2+(4ax+6x^2)t+3ax^2\}dt$$
$$=c\left[\frac{8}{3}xt^3+(2ax+3x^2)t^2+3ax^2t\right]_0^1$$
$$=c\left(\frac{8}{3}x+(2ax+3x^2)+3ax^2\right)$$
$$=(3a+3)cx^2+\left(2a+\frac{8}{3}\right)cx \quad \cdots\cdots Ⓑ$$

よって，Ⓐ＝Ⓑ が任意の x について成立する条件は，

$$\begin{cases} (3a+3)c=1 & \cdots\cdots ① \\ \left(2a+\dfrac{8}{3}\right)c=2+a & \cdots\cdots ② \\ a+b+1=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①×2－②×3 より，　$-2c=-4-3a$

$$\therefore\ c=\frac{3}{2}a+2 \quad \cdots\cdots ④$$

①に代入すると，　$(3a+3)\left(\dfrac{3}{2}a+2\right)=1$

$$9a^2+21a+10=0$$
$$(3a+2)(3a+5)=0$$

$$a=-\frac{2}{3},\ -\frac{5}{3}$$

④より，　$c=1,\ -\dfrac{1}{2}$

③より，　$b=-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}$

$$\therefore\ \underline{(a,b,c)=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right),\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)}$$

第３問

(1) L と R の個数を $\begin{pmatrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{R} \end{pmatrix}$ と表す.

コインが表の時は○, 裏のときは×と表すことにする.

(i) $0 \leqq x \leqq 15$ のとき,

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x \\ 30-x \end{pmatrix} \arrow[r, "\bigcirc"] \arrow[dr, "\times"'] & \begin{pmatrix} 2x \\ 30-2x \end{pmatrix} \cdots\cdots ① & \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix} \arrow[r, "\bigcirc"] \arrow[dr, "\times"'] & \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix} \cdots\cdots ② \\ & & \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

となる.

①のとき, $\begin{pmatrix} 2x \\ 30-2x \end{pmatrix}$ が $(m-1)$ 回目に $\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる確率は, 定義より, $P_{m-1}(2x)$

②のとき, (#) の操作の定義より, $(m-1)$ 回目も $\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}$ のままである. つまり, $P_{m-1}(0)=0$

$\begin{pmatrix} x \\ 30-x \end{pmatrix}$ に対して操作 (#) を行ったときの場合は, ①, ②で尽くせているので, $P_m(x)$ は

$$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$$

となる. このとき $y=2x$

(ii) $16 \leqq x \leqq 30$ のとき,

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x \\ 30-x \end{pmatrix} \arrow[r, "\bigcirc"] \arrow[dr, "\times"'] & \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots ③ \\ & \begin{pmatrix} 2x-30 \\ 60-2x \end{pmatrix} \cdots\cdots ④ \end{tikzcd}$$

③のとき, (#) の操作の定義より, $(m-1)$ 回目も, $\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$ のままである. つまり, $P_{m-1}(30)=1$

④のとき, $\begin{pmatrix} 2x-30 \\ 60-2x \end{pmatrix}$ が $(m-1)$ 回目に $\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる確率は, 定義より $P_{m-1}(2x-30)$

(i) と同様に考えれば, $P_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)$ となる. このとき $y=2x-30$

以上より,

$0 \leqq x \leqq 15$ のとき, $P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$

$16 \leqq x \leqq 30$ のとき, $P_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)$

(2) (1) より,

$$\begin{aligned} P_m(10) &= \frac{1}{2}P_{m-1}(20) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-2}(10)\right) \\ &= \frac{1}{4}P_{m-2}(10)+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

(漸化式 $P_m(10)=\frac{1}{4}P_{m-2}(10)+\frac{1}{4}$ を解く)

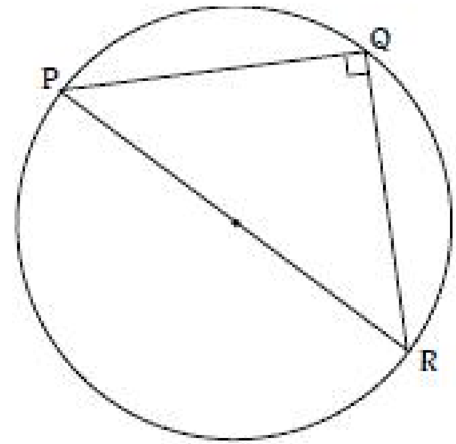
$$P_m(10)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(P_{m-2}(10)-\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} P_{2n}(10)-\frac{1}{3} &= \frac{1}{4}\left(P_{2(n-1)}(10)-\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n\left(P_0(10)-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad (\because\ P_0(10)=0) \end{aligned}$$

よって,

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

第４問



PR を斜辺とする直角二等辺三角形ができるための P, Q, R の必要十分条件は, PR が直径となり, Q が $\overset{\frown}{\mathrm{PR}}$ の中点となること, すなわち

$$\overset{\frown}{\mathrm{PR}}=\pi,\ \overset{\frown}{\mathrm{QR}}=\frac{\pi}{2}$$

となることである.

$\overset{\frown}{\mathrm{QR}}=\dfrac{\pi}{2}$ となる時刻は, $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{7}{6}\pi, \dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{11}{6}\pi$

$\overset{\frown}{\mathrm{PR}}=\pi$ となる時刻は, $t=\dfrac{2k-1}{m+2}\pi$

(ただし, k は $0<\dfrac{2k-1}{m+2}\pi\leqq 2\pi$ を満たす自然数)

よって, $\dfrac{2k-1}{m+2}\pi$ が $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{7}{6}\pi, \dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{11}{6}\pi$ のいずれかになるような自然数 m と k の組み合わせを考えればよい.

m が奇数のとき, k が整数より, $\dfrac{2k-1}{m+2}\pi$ の分母が奇数となり不適.

よって, m が偶数であることが必要で,

$m=2$ のとき, k は存在しない.

$m=4$ のとき, $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$

$m=6$ のとき, k は存在しない.

$m=8$ のとき, $k=3, 8$

$m=10$ のとき, k は存在しない.

ゆえに,

$$(m, t)=\left(4, \frac{\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{2}\right), \left(4, \frac{5}{6}\pi\right), \left(4, \frac{7}{6}\pi\right),$$
$$\underline{\left(4, \frac{3}{2}\pi\right), \left(4, \frac{11}{6}\pi\right), \left(8, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{3}{2}\pi\right)}$$