第１問

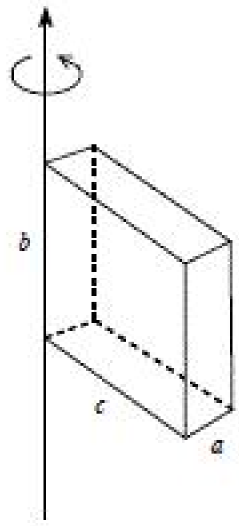
(1) V を，回転軸に垂直な平面で切断した断面は右下の図．

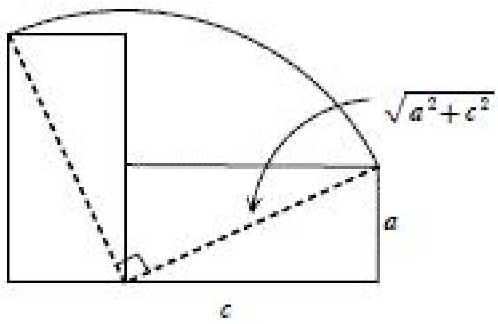
このとき，この面積 S は，

$$S=\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac \quad \cdots\cdots①$$

よって，体積を V とすれば，

$$\underline{V=Sb=\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)b+abc} \quad \cdots\cdots②$$





(2)　$b=$一定として S の領域を求める．

$$\begin{cases}0<c<1-b\\0<a<1-b\\c+a=1-b\end{cases}$$

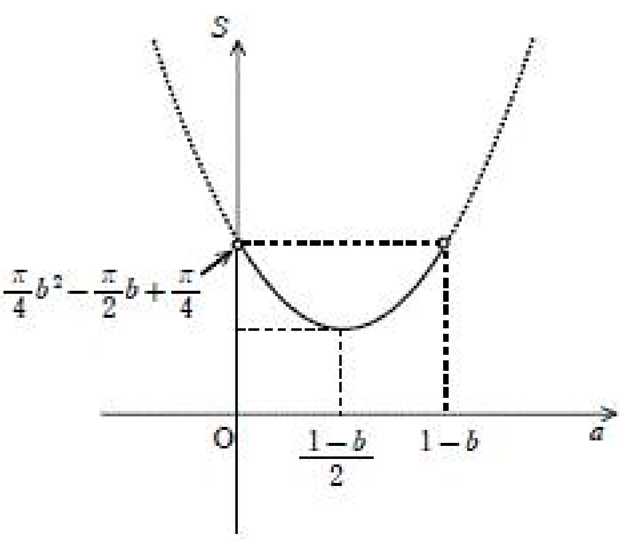
①に $c=1-b-a$ を代入して，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{4}\{a^2+(1-b-a)^2\}\pi+a(1-b-a)\\&=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2+\left\{\left(\frac{\pi}{2}-1\right)b-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right\}a+\frac{\pi}{4}b^2-\frac{\pi}{2}b+\frac{\pi}{4}\\&=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(a-\frac{1-b}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\right)(b^2-2b+1)\end{aligned}$$

よって，$0<a<1-b$ の範囲における S のグラフは右図のようになるので，

S の領域は，

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\right)(b^2-2b+1)\leqq S<\frac{\pi}{4}(b^2-2b+1)$$



よって，$b=$一定としたときの V の領域は，

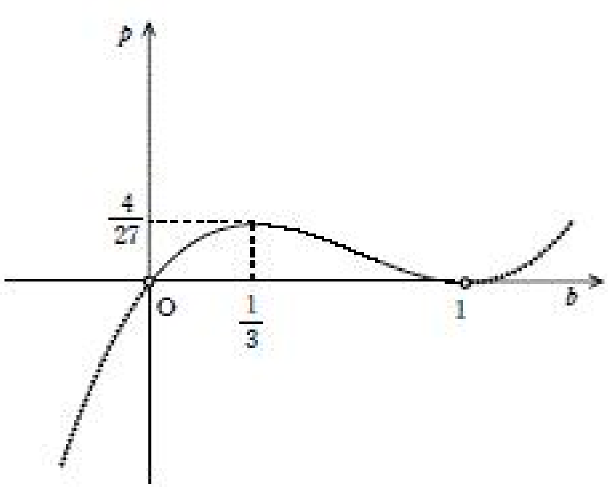
$$\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\right)(b^3-2b^2+b)\leqq V<\frac{\pi}{4}(b^3-2b^2+b)$$

次に，$p=b^3-2b^2+b$ とおくと，

$$p=b(b-1)^2$$

$$\frac{dp}{db}=(b-1)(3b-1)$$

より，p のグラフは右図の通り．



$0<b<1$ より，

$$0<p\leqq\frac{4}{27}$$

以上より，

$$\underline{0<V<\frac{\pi}{27}}$$

（注）

②において，b を消去した後，対称性に注目して，$\begin{cases}a+c=u\\ac=v\end{cases}$ とおく方法もある．

第２問

(1) $0<x<1$ では

$$\frac{1-x}{k+1}<\frac{1-x}{k+x}<\frac{1-x}{k}$$

が成り立つので，各辺 0 から 1 まで x で積分すると，

$$\int_0^1\frac{1-x}{k+1}dx<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\int_0^1\frac{1-x}{k}dx$$

$\displaystyle\int_0^1(1-x)dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$ より，

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$ （証明終わり）

(2)
$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx\\&=\int_0^1\left(\frac{k+1}{k+x}-1\right)dx\\&=(k+1)\log\frac{k+1}{k}-1\end{aligned}$$

であるから (1) より，

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<\log\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)}$$

$k=n$ から $m-1$ まで和をとり，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{(k+1)^2}<\sum_{k=n}^{m-1}\log\frac{k+1}{k}-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{(k+1)^2}&>\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)\\&=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m-1}\log\frac{k+1}{k}&=\log\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\cdots\cdot\frac{m}{m-1}\right)\\&=\log\frac{m}{n}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}&=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\\&=\frac{m-n}{2mn}\end{aligned}$$

以上より，

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$ （証明終わり）

第３問

(1)　LとRの個数を$\begin{pmatrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{R} \end{pmatrix}$と表す.

コインが表の時は○, 裏のときは×と表すことにする.

(i) $0 \leqq x \leqq 15$ のとき,

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x \\ 30-x \end{pmatrix} \arrow[r, "\bigcirc"] \arrow[dr, "\times"'] & \begin{pmatrix} 2x \\ 30-2x \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots① \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots② \end{tikzcd}$$

となる.

①のとき, $\begin{pmatrix} 2x \\ 30-2x \end{pmatrix}$が$(m-1)$回目に$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$となる確率は定義より, $P_{m-1}(2x)$.

②のとき, (#) の操作の定義より, $(m-1)$回目も$\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}$のままである. つまり, $P_{m-1}(0)=0$

$\begin{pmatrix} x \\ 30-x \end{pmatrix}$に対して操作 (#) を行ったときの場合は, ①, ②で尽くせているので, $P_m(x)$は

$$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$$

となる. このとき $y=2x$

(ii) $16 \leqq x \leqq 30$ のとき,

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x \\ 30-x \end{pmatrix} \arrow[r, "\bigcirc"] \arrow[dr, "\times"'] & \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots③ \\ & \begin{pmatrix} 2x-30 \\ 60-2x \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots④ \end{tikzcd}$$

③のとき, 定義より, $\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$のままである. つまり, $P_{m-1}(30)=1$

④のとき, $\begin{pmatrix} 2x-30 \\ 60-2x \end{pmatrix}$が$(m-1)$回目に$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$となる確率は, 定義より$P_{m-1}(2x-30)$

(i) と同様に考えれば, $P_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)$となる. このとき $y=2x-30$

以上より,

$0 \leqq x \leqq 15$ のとき, $P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$

$\underline{16 \leqq x \leqq 30 \text{ のとき}, P_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)}$

(2) (1) より,

$$\begin{aligned} P_m(10) &= \frac{1}{2}P_{m-1}(20) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-2}(10)\right) \\ &= \frac{1}{4}P_{m-2}(10)+\frac{1}{4} \\ P_m(10)-\frac{1}{3} &= \frac{1}{4}\left(P_{m-2}(10)-\frac{1}{3}\right) \\ P_{2n}(10)-\frac{1}{3} &= \frac{1}{4}\left(P_{2(n-1)}(10)-\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n\left(P_0(10)-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad (\because\ P_0(10)=0) \end{aligned}$$

よって,

$$\underline{P_{2n}(10)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}$$

(3)

$$\begin{aligned} P_m(6) &= \frac{1}{2}P_{m-1}(12) \\ &= \frac{1}{4}P_{m-2}(24) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-3}(18)\right) \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}P_{m-3}(18) \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-4}(6)\right) \\ &= \frac{1}{16}P_{m-4}(6)+\frac{3}{16} \end{aligned}$$

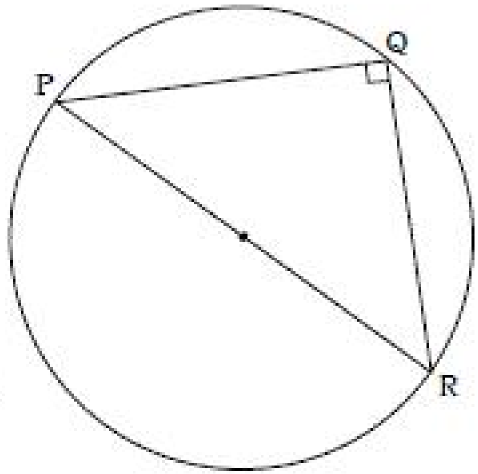
すなわち

$$\begin{aligned} P_m(6)-\frac{1}{5} &= \frac{1}{16}\left(P_{m-4}(6)-\frac{1}{5}\right) \\ P_{4n}(6)-\frac{1}{5} &= \frac{1}{16}\left(P_{4(n-1)}(6)-\frac{1}{5}\right) \\ &= \left(\frac{1}{16}\right)^n\left(P_0(6)-\frac{1}{5}\right) \\ &= -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^n \qquad (\because\ P_0(6)=0) \end{aligned}$$

よって,

$$\underline{P_{4n}(6)=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{16^n}\right)}$$

第５問



PR を斜辺とする直角二等辺三角形ができるための P, Q, R の必要十分条件は, PR が直径となり, Q が $\overset{\frown}{\mathrm{PR}}$ の中点となること．すなわち $\overset{\frown}{\mathrm{PR}}=\pi$, $\overset{\frown}{\mathrm{QR}}=\dfrac{\pi}{2}$ となればよい．

$\overset{\frown}{\mathrm{QR}}=\dfrac{\pi}{2}$ となる時刻は, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5}{6}\pi$, $\dfrac{7}{6}\pi$, $\dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{11}{6}\pi$ で,

$\overset{\frown}{\mathrm{PR}}=\pi$ となる時刻は, $t=\dfrac{2k-1}{m+2}\pi$

(ただし, k は $0<\dfrac{2k-1}{m+2}\pi\leqq 2\pi$ をみたす自然数)

よって, $\dfrac{2k-1}{m+2}\pi$ が $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5}{6}\pi$, $\dfrac{7}{6}\pi$, $\dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{11}{6}\pi$ のいずれかになるような自然数 (m, k) の組み合わせを考えればよい．

m が奇数のとき, k が整数より, $\dfrac{2k-1}{m+2}\pi$ の分母が奇数となり不適．

よって, m が偶数であることが必要で,

$m=2$ のとき, k は存在しない．

$m=4$ のとき, $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$

$m=6$ のとき, k は存在しない．

$m=8$ のとき, $k=3, 8$

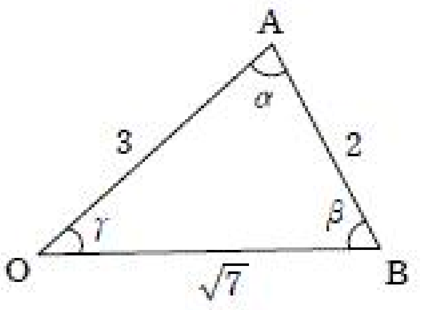
$m=10$ のとき, k は存在しない．

ゆえに, $(m, t)=\left(4, \dfrac{\pi}{6}\right), \left(4, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(4, \dfrac{5}{6}\pi\right), \left(4, \dfrac{7}{6}\pi\right),$

$\left(4, \dfrac{3}{2}\pi\right), \left(4, \dfrac{11}{6}\pi\right), \left(8, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(8, \dfrac{3}{2}\pi\right)$

第６問

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと,



$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp$ 平面 L より,

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+b\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　……①

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+b\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$　……②

3 辺が $3, 2, \sqrt{7}$ の三角形の各内角を右図のように名前をつけたとき,
余弦定理より,

$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{7}\sqrt{7}$

従って, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$
（$\mathrm{OC}=2$, $\mathrm{AC}=\sqrt{7}$, $\mathrm{BC}=3$ より）

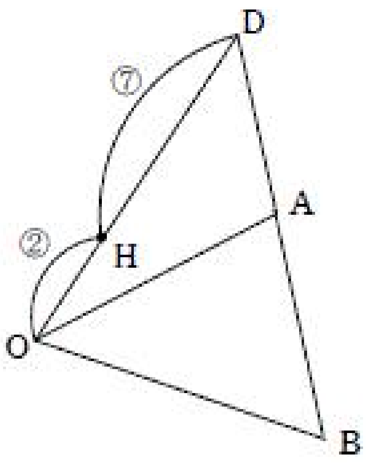
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=9$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=7$

以上を①, ②に代入して,

$3=9a+6b$, $1=6a+7b$

$\therefore\ a=\dfrac{5}{9}$, $b=-\dfrac{1}{3}$

以上より,　$\underline{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$



(2)　(1) より, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

従って, H は, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ としたとき,
OD を $2:7$ に内分する点.
また, D は辺 AB を $3:5$ に外分する点.
また, P_t, Q_t は各々, 辺OA, OB を $t:1-t$ に内分する点であるので,

$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\,/\!/\,\mathrm{AB}$

$\mathrm{CH}\perp$ 平面 L を考慮して,

(i)　$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき, 平面 M と OC の交点を M' として,

$S(t)=\triangle\mathrm{M}'\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t=\dfrac{1}{2}\times t\mathrm{AB}\times\dfrac{t}{\frac{2}{7+2}}\mathrm{CH}$　……③

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|^2=$

$\dfrac{25}{81}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\dfrac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-2\cdot\left(\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+2\cdot\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-2\cdot\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=\dfrac{8}{3}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$

③に, これと $\mathrm{AB}=2$ を代入し,　$\underline{S(t)=3\sqrt{6}t^2}$

(ii)　$\dfrac{2}{9}<t<1$ のとき, 平面 M と CA, CB の交点を P', Q' とすると,

$\mathrm{P}'\mathrm{Q}'=\dfrac{t-\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}}\mathrm{AB}=\dfrac{9t-2}{7}\times2$

$\mathrm{PQ}=t\mathrm{AB}=2t$

ここで, 切り口は $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'/\!/\mathrm{PQ}$ の台形となるので,

$S(t)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{P}'\mathrm{Q}'+\mathrm{PQ})\times\dfrac{1-t}{1-\frac{2}{9}}\mathrm{CH}$

$=\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(1-t)$

以上より, $\underline{S(t)=\begin{cases}3\sqrt{6}t^2 & \left(0<t\leqq\dfrac{2}{9}\right)\\ \dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(1-t) & \left(\dfrac{2}{9}<t<1\right)\end{cases}}$

(3)

(i)　$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき, $S(t)$ は単調増加なので,

最大値は, $S\left(\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{4\sqrt{6}}{27}$

(ii)　$\dfrac{2}{9}\leqq t<1$ のとき,

$S(t)=-\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t^2-9t+1)$

$=-\dfrac{96\sqrt{6}}{49}\left(t-\dfrac{9}{16}\right)^2+\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

となるので, 最大値は, $S\left(\dfrac{9}{16}\right)=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

以上より, 求める最大値は,　$\underline{\dfrac{3\sqrt{6}}{8}}$