第 1 問

A

(A-1)

$f(x)=cx+d$ とおくと，

$$\left|x^2-f(x)\right|=\left|x^2-cx-d\right|$$

となる。以下，$g(x)=x^2-cx-d$ とおいて考える。

$|g(x)|$ の，$a\leqq x\leqq b$ における最大値が最も小さくなるような c,d を求めればよい。

$y=|g(x)|$ のグラフは，例えば図 1 のようになるので，$\dfrac{c}{2}$ と a,b の大小で場合分けする。

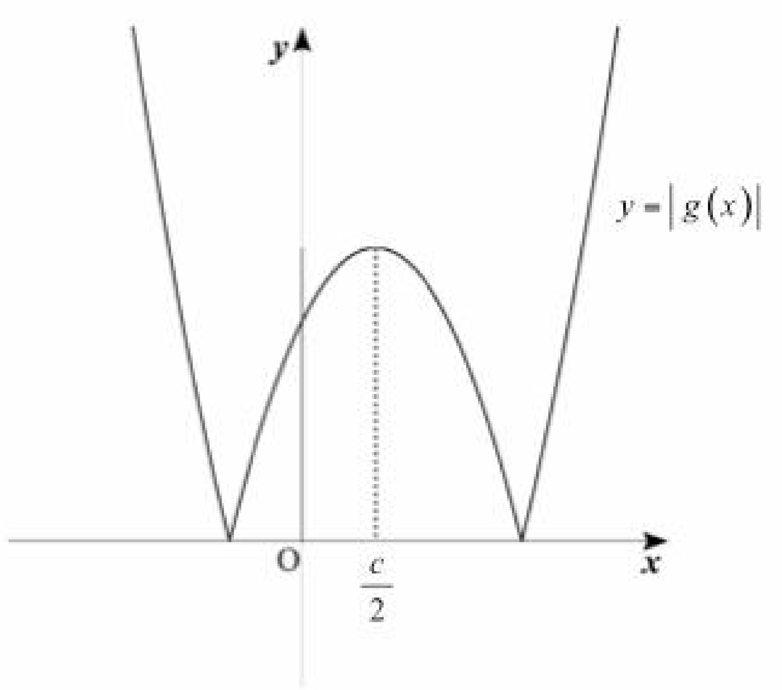

図 1

[1] $a<b\leqq\dfrac{c}{2}$ のとき

$|g(x)|$ の最大値は，$\max\left[|g(a)|,|g(b)|\right]$ である。

まず，c を固定して考えると

$$\begin{aligned}g(a)-g(b)&=\left(a^2-ac-d\right)-\left(b^2-bc-d\right)\\&=(b-a)c-\left(b^2-a^2\right)\end{aligned}$$

は一定となる。よって，$g(a)+g(b)=0$ となるように d を選んだとき，つまり

$d=\dfrac{a^2+b^2-c(a+b)}{2}$ のとき，$\max\left[|g(a)|,|g(b)|\right]$ は最小値 $\left|\dfrac{g(a)-g(b)}{2}\right|$ をとることが分かる。さらに，c の固定を解除して，$b\leqq\dfrac{c}{2}$ の範囲で c を変化させたときの

$\left|\dfrac{g(a)-g(b)}{2}\right|$ の最小値を求めればよい。ここで，$g(a)-g(b)$ は c についての一次関数と

みなすことができるので，$h(c)=g(a)-g(b)$ とおくと，

$$h(2b)=(b-a)^2>0$$

が成り立つ。$b-a>0$ なので，$h(c)$ は c について単調増加であることから，

$$h(c)\geqq h(2b)>0$$

が成り立つ。よって，$\left|\dfrac{h(c)}{2}\right|$ は $c=2b$ のときに最小値 $\dfrac{(b-a)^2}{2}$ をとる。

[2] $\dfrac{c}{2}\leqq a<b$ のとき

[1]と同様に，$|g(x)|$ の最大値は $\max\left[|g(a)|,|g(b)|\right]$ である。よって，$\dfrac{c}{2}\leqq a$ の範囲で c を変化させたときの $\left|\dfrac{h(c)}{2}\right|=\left|\dfrac{g(a)-g(b)}{2}\right|$ の最小値を求めればよい。ここで，

$$h(2a)=-(b-a)^2<0$$

が成り立つので，

$$h(c)\leqq h(2a)<0$$

が成り立つ。よって，$\left|\dfrac{h(c)}{2}\right|$ は $c=2a$ のときに最小値 $\dfrac{(b-a)^2}{2}$ をとる。

[3] $a<\dfrac{c}{2}<b$ のとき

$|g(x)|$ の最大値は，$\max\left[|g(a)|,|g(b)|,\left|g\left(\dfrac{c}{2}\right)\right|\right]$ である。ここで，

$$g(a)-g\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{(c-2a)^2}{4}>0$$

$$g(b)-g\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{(2b-c)^2}{4}>0$$

が成り立つ。さらに，

$$g(a)-g(b)=(b-a)(c-b-a)$$

が成り立つので，

$a<\dfrac{c}{2}\leqq\dfrac{a+b}{2}$ のとき $g\left(\dfrac{c}{2}\right)<g(a)\leqq g(b)$ が成り立ち，

$\dfrac{a+b}{2}\leqq\dfrac{c}{2}<b$ のとき $g\left(\dfrac{c}{2}\right)<g(b)\leqq g(a)$ が成り立つ（等号成立は $c=a+b$ のとき)。

[a] $a<\dfrac{c}{2}\leqq\dfrac{a+b}{2}$ のとき

c を固定して考えると，$g\left(\dfrac{c}{2}\right)+g(b)=0$ になるように d を選んだとき，つまり

$d=\dfrac{4b^2-4bc-c^2}{8}$ のとき，$\max\left[|g(a)|,|g(b)|,\left|g\left(\dfrac{c}{2}\right)\right|\right]$ は最小値 $\dfrac{g(b)-g(c/2)}{2}$ をとることが分かる。さらに，c の固定を解除して，$a<\dfrac{c}{2}\leqq\dfrac{a+b}{2}$ の範囲で c を変化させたときの $\dfrac{g(b)-g(c/2)}{2}$ の最小値を求めればよい。ここで，

$$\frac{g(b)-g(c/2)}{2}=\frac{(2b-c)^2}{8}$$

なので，$\dfrac{g(b)-g(c/2)}{2}$ は $c=a+b$ のときに最小値 $\dfrac{(b-a)^2}{8}$ をとる。

[b] $\dfrac{a+b}{2}\leqq\dfrac{c}{2}<b$ のとき

c を固定して考えると，$g\left(\dfrac{c}{2}\right)+g(a)=0$ になるように d を選んだとき，つまり

$d=\dfrac{4a^2-4ac-c^2}{8}$ のとき，$\max\left[|g(a)|,|g(b)|,\left|g\left(\dfrac{c}{2}\right)\right|\right]$ は最小値 $\dfrac{g(a)-g(c/2)}{2}$ をとることが分かる。さらに，c の固定を解除して，$\dfrac{a+b}{2}\leqq\dfrac{c}{2}<b$ の範囲で c を変化させたときの $\dfrac{g(a)-g(c/2)}{2}$ の最小値を求めればよい。ここで，

$$\frac{g(a)-g(c/2)}{2}=\frac{(c-2a)^2}{8}$$

なので，$\dfrac{g(a)-g(c/2)}{2}$ は $c=a+b$ のときに最小値 $\dfrac{(b-a)^2}{8}$ をとる。

以上より，$|g(x)|$ の最大値は $c=a+b,d=-\dfrac{a^2+6ab+b^2}{8}$ のときに最小値 $\dfrac{(b-a)^2}{8}$ をとる。

(答)　$f(x)=(a+b)x-\dfrac{a^2+6ab+b^2}{8}$ のとき，誤差 $\dfrac{(b-a)^2}{8}$

(A-2)

$f_1(x)=c_1x+d_1$, $f_2(x)=c_2x+d_2$ とおく。(A-1)の答より，

$\left|x^2-f_1(x)\right|$ の $0\leqq x\leqq s$ における最大値は，$c_1=s,d_1=-\dfrac{s^2}{8}$ のときに最小値 $\dfrac{s^2}{8}$ をとり，

$\left|x^2-f_2(x)\right|$ の $s\leqq x\leqq 1$ における最大値は，$c_1=s+1,d_2=-\dfrac{s^2+6s+1}{8}$ のときに最小値

$\dfrac{(1-s)^2}{8}$ をとる。よって，$0\leqq s\leqq 1$ の範囲で s を変化させるときに $\max\left[\dfrac{s^2}{8},\dfrac{(1-s)^2}{8}\right]$ が最小になる場合を求めればよい。$y=\dfrac{s^2}{8}$, $y=\dfrac{(1-s)^2}{8}$ のグラフは図 2 のようになる。

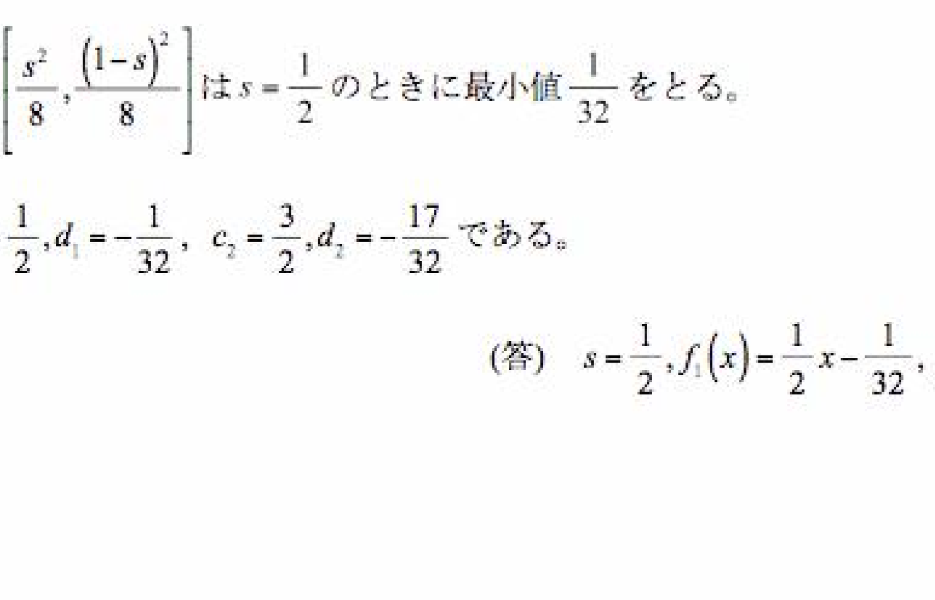

図 2

よって，$\max\left[\dfrac{s^2}{8},\dfrac{(1-s)^2}{8}\right]$ は $s=\dfrac{1}{2}$ のときに最小値 $\dfrac{1}{32}$ をとる。

このとき $c_1=\dfrac{1}{2},d_1=-\dfrac{1}{32}$，$c_2=\dfrac{3}{2},d_2=-\dfrac{17}{32}$ である。

(答)　$s=\dfrac{1}{2},f_1(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{32}$, $f_2(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{17}{32}$

B

(B-1)

条件(1)に

$$f_k(t)=h(t)\cos(\alpha k)$$

を代入すると

$$\begin{aligned}&h(t)\cos(\alpha k)=h(t)\cos(\alpha k+\alpha N)\\&h(t)\left\{\cos(\alpha k+\alpha N)-\cos\alpha k\right\}=0\\&-2h(t)\sin\left(\frac{2k+N}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{N}{2}\alpha\right)=0\end{aligned}$$

となる。ここで，$h(t)$ はつねに値 0 をとる定数関数ではないこと，および，すべての k についてこの式が成り立つことを考慮すると

$$\sin\left(\frac{N}{2}\alpha\right)=0$$

となればよい。これが成り立つ条件は, p を整数として

$$\frac{N}{2}\alpha=p\pi$$

$$\therefore\alpha=\frac{2p}{N}\pi$$

である。ここで $0\leqq\alpha<2\pi$ なので

$$0\leqq\frac{2p}{N}\pi<2\pi$$

$$\therefore 0\leqq p<N$$

となる。

(答) $\alpha=\dfrac{2p}{N}\pi$ (ただし p は $0\leqq p<N$ を満たす整数)

(B-2)

$$f_k(t)=h(t)\cos(\alpha k)$$

であるから

$$\begin{aligned}g_k(t)&=f_k(t)-f_{k-1}(t)\\&=h(t)\left\{\cos(\alpha k)-\cos(\alpha k-\alpha)\right\}\\&=-2h(t)\sin\left(\frac{2k-1}{2}\alpha\right)\sin\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

となる。これを式(2)に代入すると,

$$\frac{d^2}{dt^2}f_k(t)=M\left(g_{k+1}(t)-g_k(t)\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(h(t)\cos(\alpha k)\right)=-2Mh(t)\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\left(\frac{2k+1}{2}\alpha\right)-\sin\left(\frac{2k-1}{2}\alpha\right)\right)$$

$$\cos(\alpha k)\frac{d^2}{dt^2}h(t)=-2Mh(t)\sin\frac{\alpha}{2}\times 2\cos(\alpha k)\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos(\alpha k)\frac{d^2}{dt^2}h(t)=-4Mh(t)\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\cos(\alpha k)$$

$$\therefore\frac{d^2}{dt^2}h(t)=-4M\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2h(t)$$

となるので，式(3)が成り立つことが示された。　（証明終）

(B-3)

式(3)に

$$h(t)=\cos(\beta t)$$

を代入すると

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(\beta t)=-4M\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\cos(\beta t)$$

$$-\beta^2\cos(\beta t)=-4M\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\cos(\beta t)$$

$$\beta^2=4M\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$\therefore\beta=\pm2\sqrt{M}\sin\frac{\alpha}{2}$$

となる。

β の絶対値が最大，つまり $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ が最大となるときに，$h(t)$ の周期が最も短くなる。

$0\leqq\alpha<2\pi$ なので，α が π に近いほど $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ は大きくなる。

よって, (B　1)の結果を考慮すると，求める α の値は

N が偶数のとき　$\alpha=\pi$

N が奇数のとき　$\alpha=\dfrac{N\pm1}{N}\pi$　(ただし $N=1$ のときは $\alpha=0$)

となる。

(答) $\beta=\pm2\sqrt{M}\sin\dfrac{\alpha}{2}$

また，$h(t)$ の周期が最も短くなるような α の値は

N が偶数のとき　$\alpha=\pi$

N が奇数のとき　$\alpha=\dfrac{N\pm1}{N}\pi$　(ただし $N=1$ のときは $\alpha=0$)

第 2 問

(A-1)

求める利益の期待値は, A 氏が x 億円で入札したときの利益と，このときに土地を落札できる確率の積で表せる。

問題文より, A 氏が x 億円で入札したときの利益は $a-x$ 億円である。$x \geqq a$ のとき，利益は 0 または損失になるため，期待値が正の値で最大となる x は $1 \leqq x < a$ を満たす整数である。

土地を落札できる確率について，

1) $y = x$ のとき

問題文より, B 氏がある買い値 y をつける確率は $\frac{1}{10}$ であり，このとき公平なくじ引きが行われるので求める確率は $\frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$

2) $y < x$ のとき

B 氏が $1 \leqq y \leqq x-1$ の範囲で y を出す確率と等しいので，$\frac{x-1}{10}$

したがって土地を落札できる確率は,

$$\frac{1}{20} + \frac{x-1}{10} = \frac{2x-1}{20}$$

よって求める利益の期待値は,

$$\begin{aligned}(a-x)\cdot\frac{2x-1}{20} &= \frac{1}{20}\left\{-2x^2 + (2a+1)x - a\right\} \\ &= -\frac{1}{10}\left(x - \frac{2a+1}{4}\right)^2 + \frac{(2a+1)^2}{160} - \frac{a}{20}\end{aligned}$$

求める利益の期待値は x についての 2 次方程式となることから，最大になる x は

$$x = \frac{2a+1}{4}$$

$2 \leqq a \leqq 10$ より，x は $1 \leqq x < a$ を満たしている。

ここで x は問題文より整数でなければならない。a は整数なので，$x = \frac{2a+1}{4}$ は小数になる。

そこで，求める利益の期待値を最大にする $x = \frac{2a+1}{4}$ に近い整数値 x を考察する。

1) a が偶数のとき

2 次関数の対称性より，期待値を最大にする整数値 x は $x = n = \frac{a}{2}$ となる。

2) a が奇数のとき

$a = 2n+1$（n:自然数）とすると，$x = \frac{4n+3}{4} = n + 0.75$ のとき期待値は最大となる

2 次関数の対称性より，期待値を最大にする整数値 x は $x = n+1 = \frac{a+1}{2}$ となる。

（答）a が偶数のとき $\frac{a}{2}$，a が奇数のとき $\frac{a+1}{2}$

(A-2)

問題文より, $x \geqq a$ のときでも $a > y$ であれば A 氏は利益を得られる。$y \leqq 10$ より, $x \geqq 11$ の範囲内では A 氏は必ず土地を落札でき，$a-y$ 億円の利益を得られるので，$1 \leqq x \leqq 10$ の範囲を考えれば十分である。A 氏の買い値を x としたときの利益の期待値を E_x とおく。

1) $x = 1$ のとき

B 氏が $y = 1$ を出したときのみ落札できるので，$E_1 = (a-1)\cdot\frac{p_1}{2}$ …①　となる。

2) $2 \leqq x \leqq 10$ のとき

$E_x = (a-x)\cdot\frac{p_x}{2} + \sum_{i=1}^{x-1}(a-i)\cdot p_i$ …② となる。

ここで，①, ②より $1 \leqq x \leqq 9$ のとき

$$E_{x+1} - E_x = \frac{p_x}{2}(a-x) + \frac{p_{x+1}}{2}(a-x-1) \quad \text{…③}$$

$p_x > 0$ より③式は，$x \leqq a-1$ のときに正，$x \geqq a$ のときに負になるので

$$E_1 < E_2 < \cdots < E_{a-1} < E_a > E_{a+1} > \cdots > E_{10}$$

が成立する。したがって, A 氏の利益の期待値を最大にするのは買い値を a としたときである。

（答）a

B

(B-1) 三角不等式を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|w_{i,j}|d_{i,j} &= \sum_{j=1}^{n}|w_{i,j}d_{i,j}| \\ &= |w_{i,1}d_{i,1}| + |w_{i,2}d_{i,2}| + \cdots + |w_{i,n}d_{i,n}| \\ &\geqq |w_{i,1}d_{i,1} + w_{i,2}d_{i,2} + \cdots + w_{i,n}d_{i,n}|\end{aligned}$$

が成立する。$d_{i,j} > 0$ より，等号成立条件は

$w_{i,j} \leqq 0 \ (j = 1,2,\cdots,n)$ または $w_{i,j} \geqq 0 \ (j = 1,2,\cdots,n)$

のときのみであり，これは問題文中の(i), (ii)に他ならない。

上式の各辺は正で，それぞれの i について成り立つので

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|w_{i,j}|d_{i,j} \\ &\geqq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|w_{i,1}d_{i,1} + w_{i,2}d_{i,2} + \cdots + w_{i,n}d_{i,n}|\end{aligned}$$

が成立する。等号成立条件はそれぞれの i について

$w_{i,j} \leqq 0 \ (j = 1,2,\cdots,n)$ または $w_{i,j} \geqq 0 \ (j = 1,2,\cdots,n)$

を満たすときのみである。よって題意は示された。

(証明終)

(B-2) **(B-1)**の結果より, C を最小にするには，$p_i < q_i$ ならば(i)を，$p_i > q_i$ ならば(ii)を満たす必要がある。すなわち

$w_{1,j} \geqq 0 \ (j = 1,2,\cdots,6)$, $\sum_{j=1}^{6} w_{1,j} = \frac{2}{18}$ 　・・・①

$w_{2,j} \geqq 0 \ (j = 1,2,\cdots,6)$, $\sum_{j=1}^{6} w_{2,j} = \frac{2}{18}$ 　・・・②

$w_{3,j} \leqq 0 \ (j = 1,2,\cdots,6)$, $\sum_{j=1}^{6} w_{3,j} = -\frac{1}{18}$ 　・・・③

$w_{4,j} \leqq 0 \ (j = 1,2,\cdots,6)$, $\sum_{j=1}^{6} w_{4,j} = -\frac{1}{18}$ 　・・・④

$w_{5,j} \leqq 0 \ (j = 1,2,\cdots,6)$, $\sum_{j=1}^{6} w_{5,j} = -\frac{2}{18}$ 　・・・⑤

$w_{6,j} = 0 \ (j = 1,2,\cdots,6)$ 　・・・⑥

を満たす。①～⑥と $w_{i,j} = -w_{j,i}$ の条件を用いると,

$w_{i,j} = 0$　($i, j = 1,2$　または　$i, j = 3,4,5$)　・・・⑦

が成り立つ。①～⑦, $w_{i,i} = 0$ を用いて C を表すと

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}|w_{i,j}|d_{i,j} \\ &= \sqrt{3}w_{1,3} + 2w_{1,4} + \sqrt{3}w_{1,5} + w_{2,3} + \sqrt{3}w_{2,4} + 2w_{2,5} \\ &= \sqrt{3}w_{1,3} + 2w_{1,4} + \sqrt{3}w_{1,5} + \left(\frac{1}{18} - w_{1,3}\right) + \sqrt{3}\left(\frac{1}{18} - w_{1,4}\right) + 2\left(\frac{2}{18} - w_{1,5}\right) \\ &= \left(\sqrt{3}-1\right)w_{1,3} + \left(2-\sqrt{3}\right)w_{1,4} - \left(2-\sqrt{3}\right)w_{1,5} + \frac{5+\sqrt{3}}{18}\end{aligned}$$

と書ける。①より $w_{1,3}, w_{1,4}, w_{1,5} \geqq 0$ であることを用いると

上式で $w_{1,3}, w_{1,4}$ にかかる係数が正，$w_{1,5}$ にかかる係数が負であることから

$w_{1,3} = 0, w_{1,4} = 0, w_{1,5} = \frac{2}{18}$　のとき，最小値をとることが分かる。したがって

(答)

$$\begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,3} & w_{1,4} & w_{1,5} & w_{1,6} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,3} & w_{2,4} & w_{2,5} & w_{2,6} \\ w_{3,1} & w_{3,2} & w_{3,3} & w_{3,4} & w_{3,5} & w_{3,6} \\ w_{4,1} & w_{4,2} & w_{4,3} & w_{4,4} & w_{4,5} & w_{4,6} \\ w_{5,1} & w_{5,2} & w_{5,3} & w_{5,4} & w_{5,5} & w_{5,6} \\ w_{6,1} & w_{6,2} & w_{6,3} & w_{6,4} & w_{6,5} & w_{6,6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$