入 学 試 験 問 題

数　学(理科)

(配点 120 点)

平成 22 年 2 月 25 日　　14 時—16 時 30 分

注 意 事 項

1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3 解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

4 2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問～第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問～第 6 問について解答しなさい。

5 **解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6 **解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7 **解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8 この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9 解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

◇M4(753—49)

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1)　V の体積を a，b，c を用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　2　問

(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}\,dx < \frac{1}{2k}$$

(2)　$m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

2つの箱LとR，ボール30個，コイン投げで表と裏が等確率$\frac{1}{2}$で出るコイン1枚を用意する。xを0以上30以下の整数とする。Lにx個，Rに$30-x$個のボールを入れ，次の操作(#)を繰り返す。

(#)　箱Lに入っているボールの個数をzとする。コインを投げ，表が出れば箱Rから箱Lに，裏が出れば箱Lから箱Rに，$K(z)$個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$のとき$K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$のとき$K(z)=30-z$とする。

m回の操作の後，箱Lのボールの個数が30である確率を$P_m(x)$とする。たとえば$P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$となる。以下の問(1)，(2)，(3)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$のとき，xに対してうまくyを選び，$P_m(x)$を$P_{m-1}(y)$で表せ。

(2)　nを自然数とするとき，$P_{2n}(10)$を求めよ。

(3)　nを自然数とするとき，$P_{4n}(6)$を求めよ。

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

第　4　問

O を原点とする座標平面上の曲線

$$C:\quad y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$$

と，その上の相異なる 2 点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$を考える。

(1) $P_i\ (i=1,\ 2)$を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ $H_i\ (i=1,\ 2)$とする。このとき $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことを示せ。

(2) $x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1\leqq x\leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 P_1O, P_2O とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　5　問

Cを半径1の円周とし，AをC上の1点とする。3点P, Q, RがAを時刻$t=0$に出発し，C上を各々一定の速さで，P，Qは反時計回りに，Rは時計回りに，時刻$t=2\pi$まで動く。P, Q, Rの速さは，それぞれm，1，2であるとする。(したがって，QはCをちょうど一周する。) ただし，mは$1 \leqq m \leqq 10$をみたす整数である。△PQRがPRを斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さmと時刻tの組をすべて求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　6　問

四面体 OABC において，4つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{AB}=2$ であるとする。また，3点 O，A，B を含む平面を L とする。

(1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $0<t<1$ をみたす実数 t に対して，線分 OA，OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t とおく。2点 P_t，Q_t を通り，平面 L に垂直な平面を M とするとき，平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）