

# 入学試験問題



## 総合科目Ⅱ

(配点 100 点)

平成 22 年 3 月 13 日 16 時 00 分—18 時 00 分

### 注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 15 ページあります。  
落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手をあげて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されるが、解答は、問題ごとに所定の解答用紙に記入しなさい。
- 5 各解答用紙の指定欄に、受験番号(表面 2 箇所)、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

# 第 1 問

自然科学などに数学的方法を適用しようとするとき、しばしば直接に自然現象を扱うのではなく、近似した量を取り扱うが必要になる。また、方程式の解を直接求めるのが難しいときには、解の形を予想して解いてみる、発見的方法が重要になる。

## A

二次関数のグラフを、折れ線グラフで近似することを考える。

(A-1)  $0 \leq a < b \leq 1$  とする。閉区間  $[a, b]$  で関数  $f(x)$  で  $x^2$  を近似するとき、その誤差は、 $|x^2 - f(x)|$  の  $[a, b]$  での最大値で与えられるとする。この誤差が最も小さくなる一次関数  $f(x) = cx + d$  を求めよ。また、このときの誤差を与えよ。ただし、 $c, d$  は実数とする。

(A-2) 閉区間  $[0, 1]$  をふたつの閉区間  $[0, s]$  と  $[s, 1]$  に分けて、それぞれで  $x^2$  を一次関数で近似することを考えよう。ただし、 $0 < s < 1$  である。それぞれの閉区間  $[0, s]$  と  $[s, 1]$  で一次関数  $f_1(x), f_2(x)$  を与えて、それぞれの区間での  $x^2$  の近似の誤差の、大きい方が最も小さくなるようにする。つまり、 $|x^2 - f_1(x)|$  の  $[0, s]$  での最大値と、 $|x^2 - f_2(x)|$  の  $[s, 1]$  での最大値の大きい方が、最も小さくなるように、 $s$  と  $f_1(x), f_2(x)$  を選ぶ。このとき、 $s$  と  $f_1(x), f_2(x)$  を与えよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## B

図1のように、ひもで結ばれた点  $P_k$  ( $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ) が振動する様子を考察する。時間のパラメータを  $t$  として、それぞれの点を  $xy$  平面に図示し、時刻  $t$  における点  $P_k$  の座標が

$$(k, f_k(t)) \quad (k = \dots, -1, 0, 1, \dots)$$

で与えられるとしよう。ここで、ある自然数  $N$  に対して、すべての  $k$  について

$$f_k(t) = f_{k+N}(t) \quad (1)$$

が成り立つと仮定する。

このとき、 $g_k(t) = f_k(t) - f_{k-1}(t)$  とおくと、 $f_k(t)$ 、 $g_k(t)$  はある正の定数  $M$  について、近似的に

$$\frac{d^2}{dt^2} f_k(t) = M(g_{k+1}(t) - g_k(t)) \quad (2)$$

をみます。

ここで,

$$f_k(t) = h(t) \cos(ak)$$

とおいて,  $f_k(t)$ が条件(1), (2)をみたすように,  $h(t)$ ,  $a$ を求めることを考える。  
ただし,  $h(t)$ は  $k$ にはよらない  $t$ の関数であり, つねに値0をとる定数関数ではないとする。

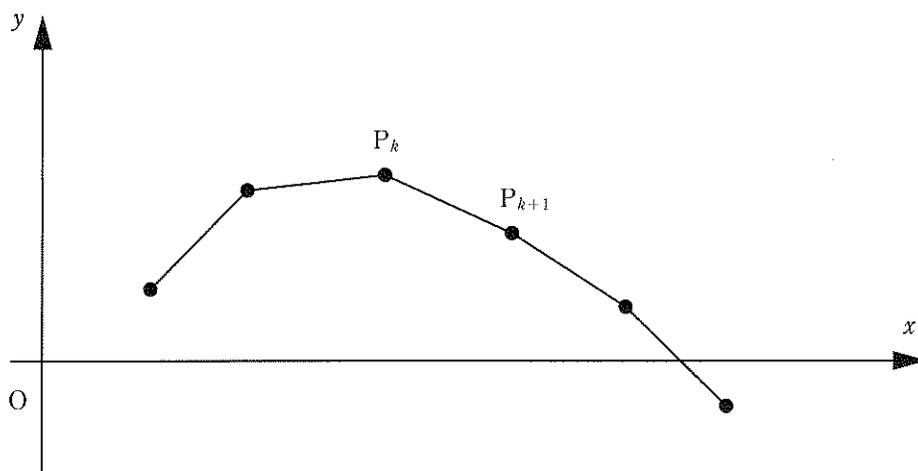


図1

(B-1) 条件(1)がみたされるような $\alpha$ の値をすべて求め、 $N$ を用いて表せ。ただし、 $0 \leq \alpha < 2\pi$ とする。

(B-2)  $f_h(t)$ が式(2)をみたすとき、

$$\frac{d^2}{dt^2} h(t) = -4M \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 h(t) \quad (3)$$

が成り立つことを示せ。

(B-3)  $h(t) = \cos(\beta t)$ とおき、これが式(3)をみたすとき、定数 $\beta$ を $M$ 、 $\alpha$ を用いて表せ。また、 $h(t)$ の周期が最も短くなるような $\alpha$ の値を $N$ を用いて表せ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

## 第 2 問

数学的な方法は、社会における最適な行動の選択においても重要な役割を果たす。この問題では、土地の競売、商品の輸送という、ふたつの商業活動における問題を考える。

### A

ある駅前の土地が競売によって売り出されることになった。競売の方法にはさまざまな種類がある。

(A-1) 買い手は自分の買い値を紙に記入して、それを秘密にしたまま、入札箱に投入するものとする。買い手が入札を終えた後、売り手は入札箱を開けて、一番高い買い値をつけた買い手に、その人がつけた買い値でこの土地を売ることにする。一番高い買い値をつけた買い手が複数いる場合は、その中から公平なくじ引きで選ばれた一人に売ることにする。

A氏は、この土地を用いた事業を行うことで $a$ 億円の利益が得られるとする。つまり、競売に参加して $x$ 億円で土地を買うことができたかすると、A氏の利益は $a - x$ 億円になる。土地を買えなかった場合は、事業の利益も土地購入代も発生しないので、A氏の利益は0円と考える。 $a$ は2から10までのある整数であるとする。

この競売に、A氏の他にもう一人の買い手(B氏)が参加しているとする。買い値は、1億円単位でつけなければならないものとする。B氏のつける買い値を $y$ 億円とし、 $y$ は1から10までの整数を等しい確率でとるものとする。

利益の期待値を最大にするためには、A氏はいくらの買い値をつければ良いか、 $a$ を用いて表せ。

(A-2) 今度は、違った競売の方法を考える。(A-1)と同様に、買い手は自分の買い値を紙に記入して、それを秘密にしたまま、入札箱に投入する。買い手が入札を終えた後、売り手は入札箱を開けて、一番高い買い値をつけた買い手に、二番目に高い買い値で売ることにする。一番高い買い値をつけた買い手が複数いる場合は、「二番目に高い買い値」が一番高い買い値と同じであることにし、その中から公平なくじ引きで選ばれた一人に売ることにする。

入札はA氏とB氏の二人で行うものとし、買い値は1億円単位でつけなければならないものとする。B氏の買い値を $y$ 億円とすると、 $y$ は1から10までのいずれかの整数であるとし、それぞれの値をとる確率は $p_y$ であるとする。ただし、 $p_y > 0$  ( $y = 1, 2, \dots, 10$ ),  $p_1 + p_2 + \dots + p_{10} = 1$ である。利益の期待値を最大にするためには、A氏はいくらの買い値をつければ良いか、 $a$ を用いて表せ。

## B

平面上の  $n$  個の地点  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) に商品が保管されている。 $i, j = 1, 2, \dots, n$  について、地点  $x_i$  と  $x_j$  との間の距離を  $d_{i,j}$  と書くことにする。ここで、各  $i, j$  に対して  $d_{i,j}$  は負でない実数であり、 $d_{i,j} = d_{j,i}$  であるとする。また、任意の互いに異なる  $i, j, k$  に対して、

$$d_{i,k} < d_{i,j} + d_{j,k}$$

が成立しているものとする。同じ点どうしの距離は 0 であるから、 $d_{i,i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) である。

それぞれの地点に保管されている商品の量を  $p_1, p_2, \dots, p_n$ 、実際に必要となる商品の量を、 $q_1, q_2, \dots, q_n$  とする。ただし、 $p_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )、 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ 、 $q_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )、 $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$  である。すべての地点で必要量を確保できるように商品を輸送するプランを立てる。輸送プランは、次のように書ける。地点  $x_i$  から地点  $x_j$  に輸送する商品の量を  $w_{i,j}$  と書くことにして、それぞれの  $j$  について

$$q_j = p_j + \sum_{i=1}^n w_{i,j} \quad (1)$$

が成立するようにする。ただし、 $x_i$  から  $x_j$  に商品が運ばれるときには  $w_{i,j} > 0$ 、 $x_j$  から  $x_i$  に商品が運ばれるときには  $w_{i,j} < 0$  となるように符号を選び、逆方向に運ばれる商品の量は符号が逆になる、つまり  $w_{i,j} = -w_{j,i}$  と決めることにする。また、 $x_i$  と  $x_j$  との間で商品を輸送しないときは、 $w_{i,j} = 0$  とする。特に、 $w_{i,i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とする。

$w_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) が条件(1)をみたすとき、輸送にかかる費用は、輸送量と輸送距離の積の総和

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |w_{i,j}| d_{i,j}$$

であると考えられる。費用  $C$  ができるだけ小さくなるような輸送プランを考えたい。

(B-1)  $w_{i,j}(i, j=1, 2, \dots, n)$ が条件(1)をみたすとする。それぞれの  $i$  について,

$$(i) \quad w_{i,j} \leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

あるいは,

$$(ii) \quad w_{i,j} \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

のどちらかが成立しなければ, この輸送プランよりも良い輸送プランが存在することを示せ。つまり,  $C$ がより小さくなるような  $w_{i,j}(i, j=1, 2, \dots, n)$ が存在することを示せ。

(B-2) 図2のように、平面上の6点  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ )が、正六角形の頂点になるように配置されている。各点で保管されている商品の量は

$$p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$$

必要となる商品の量は

$$q_1 = q_2 = \frac{1}{18}, \quad q_3 = q_4 = \frac{2}{9}, \quad q_5 = \frac{5}{18}, \quad q_6 = \frac{1}{6}$$

とする。このとき、 $C$ を最小にするような輸送プラン  $w_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ )を求めよ。ただし、正六角形の1辺の長さはそれぞれ1、各点の間の距離は平面上の距離であるとする。

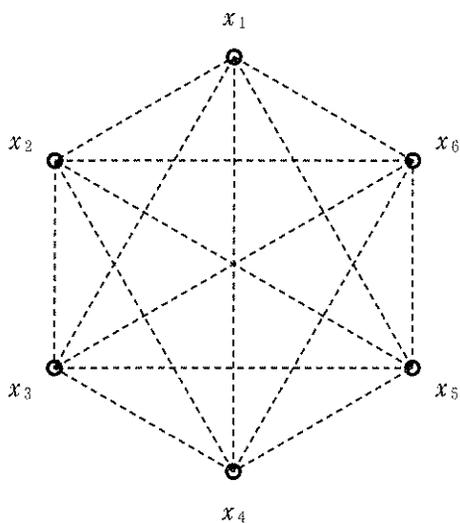


図2

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)