

第1問

与えられた3つの条件

$$\begin{cases} f(1)=1 & \dots\dots① \\ f(-1)=-1 & \dots\dots② \\ \int_{-1}^1 (bx^2+cx+d)dx=1 & \dots\dots③ \end{cases} \quad \text{について}$$

$$① \iff a+b+c+d=1 \quad \dots\dots①'$$

$$② \iff -a+b-c+d=-1 \quad \dots\dots②'$$

$$③ \iff 2\int_0^1 (bx^2+d)dx=1$$

$$\iff 2\left[\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^1=1$$

$$\iff \frac{b}{3}+d=\frac{1}{2} \quad \dots\dots③'$$

①'-②' から

$$a+c=1$$

①'+②' から

$$2(b+d)=0$$

$$b+d=0 \quad \dots\dots④$$

④-③' から

$$\frac{2}{3}b=-\frac{1}{2}$$

$$b=-\frac{3}{4} \quad \dots\dots⑤$$

これを④に代入すると, $d=\frac{3}{4}$

$$①, ②, ③ \iff \begin{cases} c=1-a \\ b=-\frac{3}{4} \\ d=\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\therefore f(x)=ax^3-\frac{3}{4}x^2+(1-a)x+\frac{3}{4}$$

$$f'(x)=3ax^2-\frac{3}{2}x+1-a$$

$$f''(x)=6ax-\frac{3}{2}$$

$$\{f''(x)\}^2=36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}$$

よって

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{f''(x)\}^2 dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(36a^2x^2 - 18ax + \frac{9}{4} \right) dx \\ &= \left[12a^2x^3 - 9ax^2 + \frac{9}{4}x \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} \\ &= 12a\left(\frac{1}{8}+1\right) - 9a\left(\frac{1}{4}-1\right) + \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}+1\right) \\ &= 12a^2 \cdot \frac{9}{8} - 9a \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{27}{2}a^2 + \frac{27}{4}a + \frac{27}{8} \\ &= \frac{27}{2}\left(a^2 + \frac{a}{2}\right) + \frac{27}{8} \\ &= \frac{27}{2}\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] + \frac{27}{8} \quad \dots\dots⑥ \end{aligned}$$

ここで a は 0 以外の実数なので, ⑥において I は $a=-\frac{1}{4}$ のときに最小値をとり,

そのとき $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$ となり,

$$\begin{aligned} I &= \frac{27}{2}\left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{27}{8} \\ &= -\frac{27}{32} + \frac{27}{8} \\ &= \frac{81}{32} \end{aligned}$$

ゆえに求める I の値は $\underline{\underline{I=\frac{81}{32}}}$

第2問

(1) $1 < \sqrt{2} < 2$ より, $a_1 = \sqrt{2} - 1$

$$a_2 = \left\langle \frac{1}{a_1} \right\rangle = \langle \sqrt{2} + 1 \rangle = \sqrt{2} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1$$

よって, 帰納的に $n \geq 3$ についても $a_n = \sqrt{2} - 1$

ゆえに $a_n = \sqrt{2} - 1$ (n は任意の自然数)

(2) $a_1 = a$ より, $a < 1$ よって, $\frac{1}{3} \leq a < 1 \dots\dots \textcircled{1}$

$a = \frac{1}{3}$ のときは $a_2 = 0$ となり不適.

よって, $\frac{1}{a}$ の整数部分として, 1 と 2 が考えられる.

(i) 整数部分が 1 のとき,

$$a = a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} - 1$$

$$\text{よって, } a^2 + a - 1 = 0 \iff a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

(ii) 整数部分が 2 のとき, 同様にして,

$$a = \frac{1}{a} - 2$$

$$a^2 + 2a - 1 = 0 \iff a = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } a = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{ゆえに, } \underline{a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \sqrt{2} - 1}$$

第3問

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & w([a, b; c]) = -q \\
 \iff & p - q - (a + b) = -q \\
 \iff & p = a + b \iff b = -a + p \quad \dots\dots ①
 \end{aligned}$$

これを条件式 $-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
 & -q \leq -a + p \leq 0 \leq a \leq p \text{ より, } p \leq a \leq p \\
 & \therefore a = p \quad \dots\dots ②
 \end{aligned}$$

$$\text{このとき①より, } b = 0 \quad \dots\dots ③$$

$$\text{②, ③を } b \leq c \leq a \quad \dots\dots ④ \text{ に代入すると, } 0 \leq c \leq p$$

よって c は 0 以上 p 以下の整数値をとり得るので, 題意を満たす (p, q) パターンの個数は $p + 1$ (個)

$$\text{同様にして, } w([a, b, c]) = p$$

$$\begin{aligned}
 \iff & p - q - (a + b) = p \\
 \iff & q = -(a + b) \iff a = -b - q \quad \dots\dots ⑤
 \end{aligned}$$

これを条件式 $-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
 & -q \leq b \leq 0 \leq -b - q \leq p \text{ より, } -q \leq b \leq -q \\
 & \therefore b = -q \quad \dots\dots ⑥
 \end{aligned}$$

$$\text{このとき⑤より, } a = 0 \quad \dots\dots ⑦$$

$$\text{⑤, ⑥を ④に代入すると, } -q \leq c \leq 0$$

よって c は $-q$ 以上 0 以下の整数値をとり得るので, 題意を満たす (p, q) パターンの個数は $q + 1$ (個)

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & q = p \text{ のとき, } w([a, b; c]) = -p + s \\
 \iff & p - p - (a + b) = -p + s \\
 \iff & b = -a + p - s \quad \dots\dots ⑧ \\
 & -q \leq b \leq 0 \leq a \leq p \text{ かつ } q = p \text{ より,} \\
 & -p \leq -a + p - s \leq 0 \leq a \leq p \\
 \iff & \begin{cases} a \leq 2p - s \\ p - s \leq a \\ 0 \leq a \leq p \end{cases} \iff \begin{cases} p - s \leq a \leq 2p - s \\ 0 \leq a \leq p \end{cases} \quad \dots\dots (*)
 \end{aligned}$$

(*) を満たす a が存在するための条件は

$$\begin{cases} 0 \leq 2p - s \\ p - s \leq p \end{cases} \therefore 0 \leq s \leq 2p \text{ である.}$$

よって, $s < 0$ のとき 0 個.

与えられた条件より $s \leq p$ なので, $0 \leq s \leq p$

このとき,

$$p - s \geq 0 \text{ かつ } 2p - s \geq p \text{ より,}$$

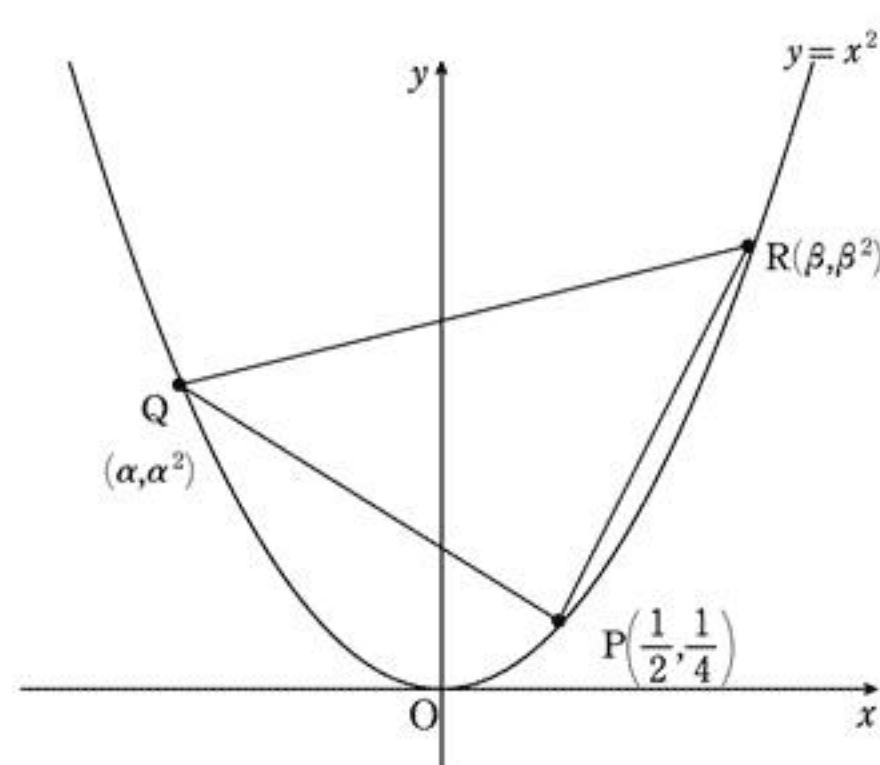
$$(*) \iff p - s \leq a \leq p$$

a を固定すると b は⑧より 1 通りに決まり,

④より, $-a + p - s \leq c \leq a$ で c は $2a - p + s + 1$ 通りに決まる.

$$\begin{aligned}
 \therefore & \sum_{a=p-s}^p \{2a - p + s + 1\} \\
 & = (2p - s)(s + 1) + (-p + s + 1)(s + 1) \\
 & = (s + 1)(p + 1)
 \end{aligned}$$

よって, 求める個数は $(s + 1)(p + 1)$ (個)



二等辺三角形の条件より,

$$PQ = PR$$

$$PQ^2 = PR^2$$

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \beta\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \beta^2\right)^2$$

$$\alpha^4 + \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha = \beta^4 + \frac{1}{2}\beta^2 - \beta$$

$$(\alpha^4 - \beta^4) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta) = 0$$

$$(\alpha - \beta) \left\{ (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1 \right\} = 0$$

ここで、 $\alpha = \beta$ のとき、三角形 PQR ができないので、 $\alpha - \beta \neq 0$ によって

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1 = 0 \quad \dots\dots(\star)$$

ここで、 $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha\beta = t \end{cases}$ とおくと、

α, β は、2 次方程式 $x^2 - sx + t = 0$ の異なる 2 実数解だから、

$$(\text{判別式}) > 0 \quad \therefore s^2 - 4t > 0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

s, t を用いて $(\star)$ を書き換えると、

$$(s^2 - 2t)s + \frac{1}{2}s - 1 = 0$$

$s = 0$ とすると、 $-1 = 0$ となり、不適なので、 $s \neq 0$

ゆえに

$$s^2 - 2t = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{2}s \right) \quad \therefore t = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2s} + \frac{1}{4} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

ここで、

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} + (\alpha + \beta) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + s \right) \quad \dots\dots\textcircled{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{4} + (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{4} + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + s^2 - 2t \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{4} \right) \quad \dots\dots\textcircled{B} \quad (\because \textcircled{2} \text{より}) \end{aligned}$$

$\textcircled{A}$ より、

$$s = 3X - \frac{1}{2} \quad \dots\dots\textcircled{C}$$

これを $\textcircled{B}$ に代入して、

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3X - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{X - \frac{1}{6}} - \frac{1}{12} \quad \dots\dots\textcircled{3} \end{aligned}$$

ここで、 $\textcircled{1}$ に $\textcircled{2}$ を代入して、

$$-s^2 + \frac{2}{s} - 1 > 0$$

$$s^4 + s^2 - 2s < 0$$

$$s(s-1)(s^2+s+2) < 0 \quad \dots\dots(*)$$

ここで、 $s^2 + s + 2 = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ より、

$$(*) \iff 0 < s < 1$$

これに $\textcircled{C}$ を代入して、

$$0 < 3X - \frac{1}{2} < 1 \quad \therefore \frac{1}{6} < X < \frac{1}{2} \quad \dots\dots\textcircled{4}$$

ゆえに、求める軌跡は $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より

$$\text{曲線 } y = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{6}} - \frac{1}{12} \text{ の } \frac{1}{6} < x < \frac{1}{2} \text{ の部分}$$