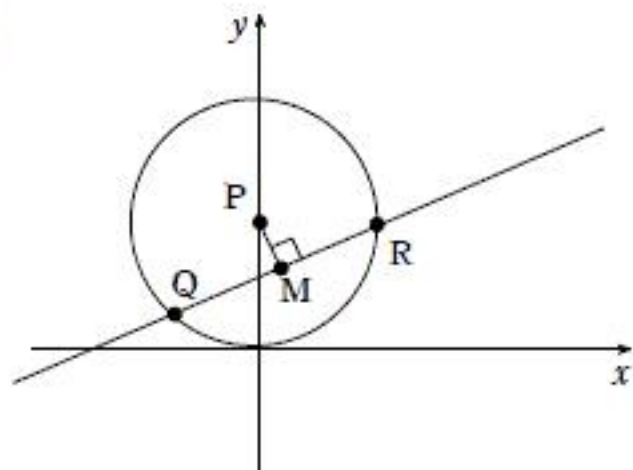


第1問

(1)



QR の中点を M とすると,

$QR \perp PM$  となる.

点と直線の距離の公式より

$$PM = \left| \frac{a \cdot 0 - 1 + a}{\sqrt{a^2 + 1}} \right| = \frac{1-a}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad (\because 0 < a < 1)$$

$$\begin{aligned} S(a) &= PM \times RM = PM \times \sqrt{1 - PM^2} \\ &= \frac{1-a}{\sqrt{a^2 + 1}} \sqrt{1 - \frac{(1-a)^2}{a^2 + 1}} \\ &= \frac{1-a}{\sqrt{a^2 + 1}} \sqrt{\frac{2a}{a^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

(2)  $S(a) > 0$  より,  $S(a)$  を最大とするような  $a$  と,  $\{S(a)\}^2$  を最大にするような  $a$  は一致する.

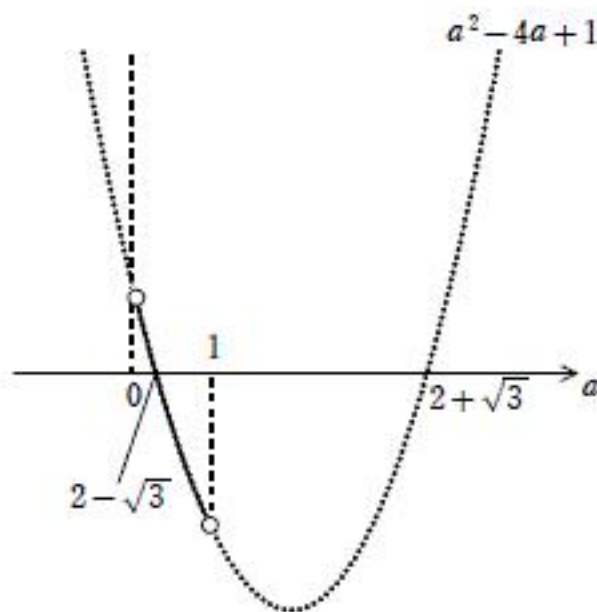
$$\frac{1}{2} \{S(a)\}^2 = \frac{(1-a)^2 a}{(1+a^2)^2} = f(a) \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{\{-2(1-a)a + (1-a)^2\}(1+a^2)^2 - (1-a)^2 a \cdot 2(1+a^2) \cdot 2a}{(1+a^2)^4} \\ &= \frac{(1-a)}{(1+a^2)^3} (a^3 - 3a^2 - 3a + 1) \\ &= \frac{(1-a)(a+1)}{(1+a^2)^3} (a^2 - 4a + 1) \end{aligned}$$

$0 < a < 1$  より            の部分は正となるので,  
 $f'(a)$  の正負は  $a^2 - 4a + 1$  の正負に一致する.

$$a^2 - 4a + 1 = \{a - (2 - \sqrt{3})\} \{a - (2 + \sqrt{3})\}$$

|         |   |     |                |     |   |
|---------|---|-----|----------------|-----|---|
| $a$     | 0 | ... | $2 - \sqrt{3}$ | ... | 1 |
| $f'(a)$ |   | +   | 0              | -   |   |
| $f(a)$  |   | ↗   |                | ↘   |   |



以上から,  $a = 2 - \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \text{(注)} \quad \{S(a)\}^2 &= PM^2 (1 - PM^2) \\ &= -PM^4 + PM^2 \\ &= -\left(PM^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

等号は  $PM^2 = \frac{1}{2}$  のときに成立する, と考えると微分法は不要となる.

第2問

(1)  $1 < \sqrt{2} < 2$  より,  $a_1 = \sqrt{2} - 1$

$$a_2 = \left\langle \frac{1}{a_1} \right\rangle = \langle \sqrt{2} + 1 \rangle = \sqrt{2} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1$$

よって, 帰納的に  $n \geq 3$  についても  $a_n = \sqrt{2} - 1$

ゆえに  $\underline{a_n = \sqrt{2} - 1}$  ( $n$  は任意の自然数)

(2)  $a_1 = a$  より,  $a < 1$  よって,  $\frac{1}{3} \leq a < 1 \dots\dots \textcircled{1}$

$a = \frac{1}{3}$  のときは  $a_2 = 0$  となり不適.

よって,  $\frac{1}{a}$  の整数部分として, 1 と 2 が考えられる.

(i) 整数部分が 1 のとき,

$$a = a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} - 1$$

$$\text{よって, } a^2 + a - 1 = 0 \iff a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

(ii) 整数部分が 2 のとき, 同様にして,

$$a = \frac{1}{a} - 2$$

$$a^2 + 2a - 1 = 0 \iff a = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } a = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{ゆえに, } \underline{a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \sqrt{2} - 1}$$

(3)

題意より全ての自然数  $n$  について  $a_n$  は 0 または正の有理数なので

$$a_n = \frac{p_n}{q_n} \quad (p_n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数, } q_n \text{ は自然数})$$

と書ける.

$$(I) \quad a_1 = \left\langle \frac{p}{q} \right\rangle = \frac{p_1}{q_1}$$

であるから,  $q = q_1$  としてよい. このとき,

$$0 \leq p_1 < q$$

(II)  $\cdot p_n \neq 0$  のとき

$$q_n = \alpha p_n + \beta \quad (\alpha, \beta \text{ は自然数 } 0 \leq \beta < p_n)$$

とすると,

$$a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle = \left\langle \frac{q_n}{p_n} \right\rangle = \frac{\beta}{p_n}$$

であるから,  $\begin{cases} p_{n+1} = \beta \\ q_{n+1} = p_n \end{cases}$  としてよい. このとき,

$$0 \leq p_{n+1} < p_n$$

$\cdot p_n = 0$  のとき

$$q_{n+1} \text{ は任意で, } p_{n+1} = 0$$

以上をまとめると,  $\{p_n\}$  は

$$\begin{cases} 0 \leq p_1 < q \\ 0 \leq p_{n+1} < p_n & (p_n \neq 0) \\ p_{n+1} = 0 & (p_n = 0) \end{cases}$$

を満たす自然数の列.

よって,  $n \geq q$  に対しては

$$p_n = 0 \quad \therefore a_n = 0 \quad \blacksquare$$



第3問

- (1) 点 P から出発して円周上を反時計回りに道のり  $L$  だけ進んだときの回転角を  $\theta$  とおくと

$$t\theta = L \iff \theta = \frac{L}{t}$$

ゆえに,

$$\begin{cases} u(t) = t \cos \theta = t \cos \frac{L}{t} \\ v(t) = t \sin \theta = t \sin \frac{L}{t} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} u'(t) = \cos \frac{L}{t} + \frac{L}{t} \sin \frac{L}{t} \\ v'(t) = \sin \frac{L}{t} - \frac{L}{t} \cos \frac{L}{t} \end{cases}$$

よって,

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2} dt \\ &= \int_a^1 \sqrt{1 + \frac{L^2}{t^2}} dt \end{aligned}$$

不定積分

$$I = \int \sqrt{1 + \frac{L^2}{t^2}} dt \quad \text{を求める.} \quad \langle t = L \tan \varphi \text{ で置換} \rangle$$

$$dt = L \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$I = \int \sqrt{1 + \frac{1^2}{\tan^2 \varphi}} \cdot \frac{L}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$= \int \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{L}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$= L \int \frac{1}{(1 - \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi} \sin \varphi d\varphi \quad \langle u = \cos \varphi \text{ で置換} \rangle$$

$$du = -\sin \varphi d\varphi$$

$$= L \int \frac{-du}{(1 - u^2)u^2}$$

$$= -L \int \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{1 - u^2} \right) du$$

$$= -L \int \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{2(1+u)} + \frac{1}{2(1-u)} \right) du$$

$$= -L \left( -\frac{1}{u} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right)$$

$$\begin{aligned} u = \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{t}{L} \right)^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore f(a) = \sqrt{L^2 + 1^2} - \sqrt{L^2 + a^2} - \frac{L}{2} \log \frac{(\sqrt{L^2 + 1} + L)(\sqrt{L^2 + a^2} - L)}{(\sqrt{L^2 + 1} - L)(\sqrt{L^2 + a^2} + L)}$$

$$(3) \quad f(a) = \sqrt{L^2 + 1^2} - \sqrt{L^2 + a^2} - \frac{L}{2} \log \frac{(\sqrt{L^2 + 1} + L)}{(\sqrt{L^2 + 1} - L)(\sqrt{L^2 + a^2} + L)} - \frac{L}{2} \log(\sqrt{L^2 + a^2} - L)$$

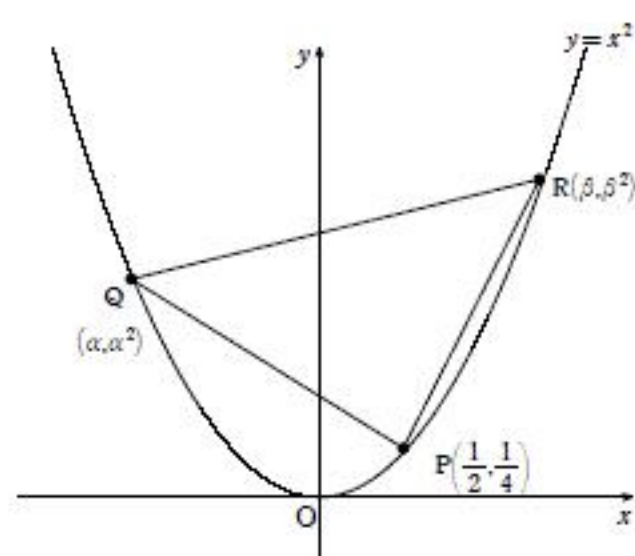
$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{\sqrt{L^2 + 1}}{\log a} = 0, \quad \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\sqrt{L^2 + a^2}}{\log a} = 0, \quad \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\log \frac{(\sqrt{L^2 + 1} + L)}{(\sqrt{L^2 + 1} - L)(\sqrt{L^2 + a^2} + L)}}{\log a} = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{\log(\sqrt{L^2 + a^2} - L)}{\log a} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{\log a} \log \frac{a^2}{(\sqrt{L^2 + a^2} + L)}$$

$$= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{\log a} \left\{ 2 \log a - \log(\sqrt{L^2 + a^2} + L) \right\} = 2$$

以上から

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{f(a)}{\log a} = -\frac{L}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{-L}}$$



二等辺三角形の条件より,

$$PQ = PR$$

$$PQ^2 = PR^2$$

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \beta\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \beta^2\right)^2$$

$$\alpha^4 + \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha = \beta^4 + \frac{1}{2}\beta^2 - \beta$$

$$(\alpha^4 - \beta^4) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta) = 0$$

$$(\alpha - \beta) \left\{ (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1 \right\} = 0$$

ここで,  $\alpha = \beta$  のとき, 三角形 PQR ができないので,  $\alpha - \beta \neq 0$  によって

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1 = 0 \quad \dots\dots(\star)$$

ここで,  $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha\beta = t \end{cases}$  とおくと,

$\alpha, \beta$  は, 2 次方程式  $x^2 - sx + t = 0$  の異なる 2 実数解だから,

$$(\text{判別式}) > 0 \quad \therefore s^2 - 4t > 0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$s, t$  を用いて  $(\star)$  を書き換えると,

$$(s^2 - 2t)s + \frac{1}{2}s - 1 = 0$$

$s = 0$  とすると,  $-1 = 0$  となり, 不適なので,  $s \neq 0$

ゆえに

$$s^2 - 2t = \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{1}{2}s \right) \quad \therefore t = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2s} + \frac{1}{4} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

ここで,

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} + (\alpha + \beta) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + s \right) \quad \dots\dots\textcircled{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{4} + (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{4} + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} + s^2 - 2t \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \right) \quad \dots\dots\textcircled{B} \quad (\because \textcircled{2} \text{より}) \end{aligned}$$

①より,

$$s = 3X - \frac{1}{2} \quad \dots\dots\textcircled{C}$$

これを ②に代入して,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3X - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{X - \frac{1}{6}} - \frac{1}{12} \quad \dots\dots\textcircled{3} \end{aligned}$$

ここで, ①に②を代入して,

$$-s^2 + \frac{2}{s} - 1 > 0$$

$$s^4 + s^2 - 2s < 0$$

$$s(s-1)(s^2+s+2) < 0 \quad \dots\dots(*)$$

ここで,  $s^2 + s + 2 = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$  より,

$$(*) \iff 0 < s < 1$$

これに ③を代入して,

$$0 < 3X - \frac{1}{2} < 1 \quad \therefore \frac{1}{6} < X < \frac{1}{2} \quad \dots\dots\textcircled{4}$$

ゆえに, 求める軌跡は③, ④より

$$\text{曲線 } y = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{6}} - \frac{1}{12} \text{ の } \frac{1}{6} < x < \frac{1}{2} \text{ の部分}$$


---



## 第5問

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & w([a, b; c]) = -q \\
 \Leftrightarrow & p - q - (a + b) = -q \\
 \Leftrightarrow & p = a + b \Leftrightarrow b = -a + p \quad \dots\dots ①
 \end{aligned}$$

これを条件式  $-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p$  に代入すると,

$$\begin{aligned}
 & -q \leq -a + p \leq 0 \leq a \leq p \text{ より, } p \leq a \leq p \\
 & \therefore a = p \quad \dots\dots ②
 \end{aligned}$$

このとき①より,  $b = 0$   $\dots\dots ③$

②, ③を  $b \leq c \leq a$   $\dots\dots ④$  に代入すると,  $0 \leq c \leq p$

よって  $c$  は  $0$  以上  $p$  以下の整数値をとり得るので, 題意を満たす  $(p, q)$  パターンの個数は  $\underline{p+1}$  (個)

同様にして,  $w([a, b, c]) = p$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & p - q - (a + b) = p \\
 \Leftrightarrow & q = -(a + b) \Leftrightarrow a = -b - q \quad \dots\dots ⑤
 \end{aligned}$$

これを条件式  $-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p$  に代入すると,

$$\begin{aligned}
 & -q \leq b \leq 0 \leq -b - q \leq p \text{ より, } -q \leq b \leq -q \\
 & \therefore b = -q \quad \dots\dots ⑥
 \end{aligned}$$

このとき⑤より,  $a = 0$   $\dots\dots ⑦$

⑤, ⑥を ④に代入すると,  $-q \leq c \leq 0$

よって  $c$  は  $-q$  以上  $0$  以下の整数値をとり得るので, 題意を満たす  $(p, q)$  パターンの個数は  $\underline{q+1}$  (個)

$$(2) \quad q = p \text{ のとき, } w([a, b; c]) = -p + s$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & p - p - (a + b) = -p + s \\
 \Leftrightarrow & b = -a + p - s \quad \dots\dots ⑧
 \end{aligned}$$

$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p$  かつ  $q = p$  より,

$$-p \leq -a + p - s \leq 0 \leq a \leq p$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2p - s \\ p - s \leq a \\ 0 \leq a \leq p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p - s \leq a \leq 2p - s \\ 0 \leq a \leq p \end{cases} \quad \dots\dots (*)$$

(\*)を満たす  $a$  が存在するための条件は

$$\begin{cases} 0 \leq 2p - s \\ p - s \leq p \end{cases} \therefore 0 \leq s \leq 2p \text{ である.}$$

よって,  $s < 0, 2p < s$  のとき 0 個.

(i)  $0 \leq s \leq p$  のとき

$$p - s \geq 0 \text{ かつ } 2p - s \geq 0 \text{ より,}$$

$$(*) \Leftrightarrow p - s \leq a \leq p$$

$a$  を固定すると,  $b$  は⑧より1通りに決まり,

$-a + p - s \leq c \leq a$  で  $c$  は,  $2a - p + s + 1$  通りに決まる.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{a=p-s}^p \{2a - p + s + 1\} \\
 &= (2p - s)(s + 1) + (-p + s + 1)(s + 1) \\
 &= (s + 1)(p + 1)
 \end{aligned}$$

(ii)  $p < s \leq 2p$  のとき

$$p - s < 0 \text{ かつ } 2p - s < p \text{ より,}$$

$$(*) \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2p - s$$

(i)と同様に  $a$  を固定すると,  $b$  は⑧より1通り,  $c$  は  $2a - p + s + 1$  通りに決まるから,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{a=0}^{2p-s} \{2a - p + s + 1\} \\
 &= (2p - s)(2p - s + 1) + (-p + s + 1)(2p - s + 1) \\
 &= (2p - s + 1)(p + 1)
 \end{aligned}$$

以上より, 求める答えは,

$$\begin{cases} 0 \text{ 個} & (s < 0, s > 2p) \\ (s + 1)(p + 1) \text{ 個} & (0 \leq s \leq p) \\ \underline{(2p - s + 1)(p + 1) \text{ 個}} & (p < s \leq 2p) \end{cases}$$

(3) (2)の  $s$  を  $0$  から  $2p$  まで変化させ, 足しあげればよい.

$$\begin{aligned}
 \therefore & \sum_{s=0}^p (s + 1)(p + 1) + \sum_{s=p+1}^{2p} (2p - s + 1)(p + 1) \\
 &= \frac{1}{2}(p + 1)(p + 2)(p + 1) + (p + 1)(1 + 2 + \dots + p) \\
 &= \frac{1}{2}(p + 1)^2(p + 2) + \frac{1}{2}p(p + 1)^2 \\
 &= (p + 1)^3
 \end{aligned}$$

よって, 求める答えは,  $\underline{(p + 1)^3}$  (個)



(1)

$$\begin{aligned} f(t) &= xt^2 + yt \\ &= x\left(t + \frac{y}{2x}\right)^2 - \frac{y^2}{4x} \end{aligned}$$

今

$$f(0) - f\left(-\frac{y}{2x}\right) = \frac{y^2}{4x} \geq 0$$

$$f(1) - f\left(-\frac{y}{2x}\right) = \frac{(2x+y)^2}{4x} \geq 0$$

$$f(1) - f(0) = x + y$$

$$0 < -\frac{y}{2x} \leq \frac{1}{2} \iff -x < y < 0$$

$$\frac{1}{2} < -\frac{y}{2x} \leq 1 \iff -2x \leq y < -x$$

である.  $0 \leq t \leq 1$  における  $f(t)$  の最大値と最小値の差を  $g(x, y)$  とすると,i)  $0 \leq y$  のとき

$$g(x, y) = f(1) - f(0) = \underline{x + y}$$

ii)  $-x \leq y < 0$  のとき

$$g(x, y) = f(1) - f\left(-\frac{y}{2x}\right) = \underline{x + y + \frac{y^2}{4x}}$$

iii)  $-2x \leq y < -x$  のとき

$$g(x, y) = f(0) - f\left(-\frac{y}{2x}\right) = \underline{\frac{y^2}{4x}}$$

iv)  $y < -2x$  のとき

$$g(x, y) = f(0) - f(1) = \underline{-x - y}$$

(2)

$$-z \leq f(t) \leq 1 - z$$

が  $0 \leq t \leq 1$  なる全ての  $t$  について成り立つので,  $0 \leq t \leq 1$  における  $f(t)$  の最大値, 最小値をそれぞれ  $M(x, y)$ ,  $m(x, y)$  とすると,

$$\begin{cases} -z \leq m(x, y) \\ M(x, y) \leq 1 - z \end{cases} \quad \therefore \quad -m(x, y) \leq z \leq 1 - M(x, y) \quad \dots\dots(*)$$

(\*) を満たす  $z$  の存在条件は,

$$-m(x, y) \leq 1 - M(x, y) \iff g(x, y) \leq 1$$

これが成り立つ  $(x, y)$  全体を  $x > 0$  において図示すればよい.i)  $0 \leq y$  のとき

$$x + y \leq 1$$

ii)  $-x \leq y < 0$  のとき

$$x + y + \frac{y^2}{4x} = \frac{(2x+y)^2}{4x} \leq 1$$

$$\iff (2x+y)^2 - 4x \leq 0$$

$$\iff (2x+y+2\sqrt{x})(2x+y-2\sqrt{x}) \leq 0$$

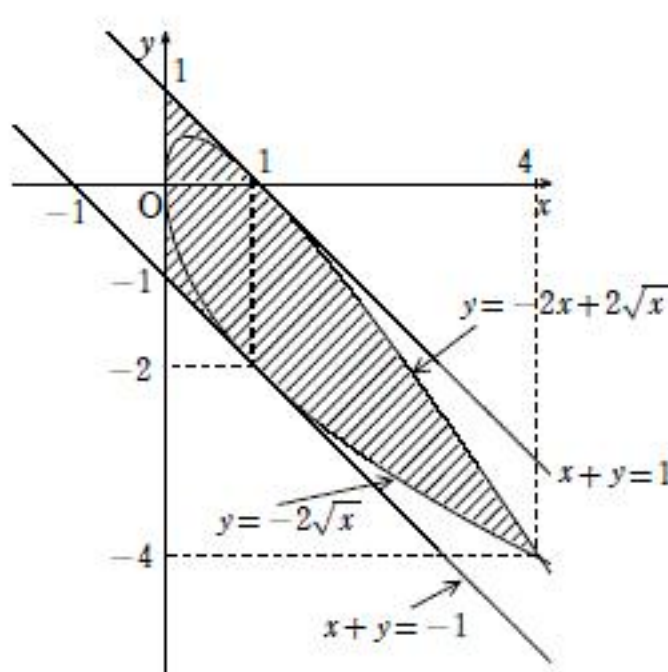
$$\iff -2x - 2\sqrt{x} \leq y \leq -2x + 2\sqrt{x}$$

iii)  $-2x \leq y < -x$  のとき

$$\frac{y^2}{4x} \leq 1 \iff -2\sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}$$

iv)  $y < -2x$  のとき

$$-x - y \leq 1 \iff x + y \geq -1$$

以上から  $S$  の概形は, 下図の斜線部分で  $y$  軸以外の境界を含む.(3) 領域  $V$  は (\*) かつ  $0 \leq x \leq 1$  を満たすような  $(x, y, z)$  全体である. $V$  を平面  $x=k$  ( $0 < k < 1$ ) で切断したときの面積を  $S(k)$  とすると,(2) の図から,  $y$  の変域は

$$-1-k \leq y \leq 1-k$$

となり,

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_{-1-k}^{1-k} \{1 - M(k, y) - (-m(k, y))\} dy \\ &= \int_{-1-k}^{1-k} \{1 - (M(k, y) - m(k, y))\} dy \\ &= \int_{-1-k}^{1-k} (1 - g(k, y)) dy \end{aligned}$$

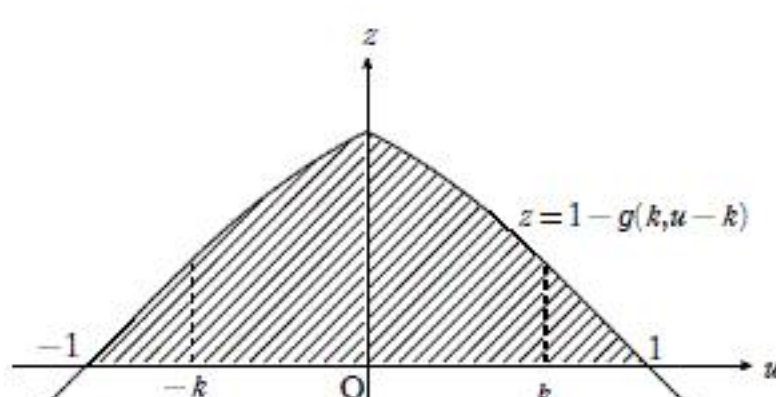
ここで,  $y = u - k$  とおくと,

$$dy = du, \quad \begin{array}{c|c} y & -1-k \rightarrow 1-k \\ \hline u & -1 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$S(k) = \int_{-1}^1 (1 - g(k, u - k)) du$$

ここに

$$g(k, u - k) = \begin{cases} u & (k \leq u) \\ \frac{(u+k)^2}{4k} & (0 \leq u < k) \\ \frac{(u-k)^2}{4k} & (-k \leq u < 0) \\ -u & (u < -k) \end{cases}$$

(平面  $x=k$  による  $V$  の切断面の面積)

対称性から

$$\begin{aligned} S(k) &= 2 \int_0^1 (1 - g(k, u - k)) du \\ &= 2 - 2 \int_0^1 g(k, u - k) du \\ &= 2 - 2 \left\{ \int_0^k \frac{(u+k)^2}{4k} du + \int_k^1 u du \right\} \\ &= 2 - 2 \left[ \frac{(u+k)^3}{12k} \right]_0^k - 2 \left[ \frac{u^2}{2} \right]_k^1 \\ &= 2 - \frac{8k^3 - k^3}{6k} - (1 - k^2) \\ &= 1 - \frac{1}{6}k^2 \\ V &= \int_0^1 S(k) dk \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{6}k^2\right) dk \\ &= \left[ k - \frac{k^3}{18} \right]_0^1 \\ &= \frac{17}{18} \end{aligned}$$