

- (A-1) $x \leq 0$ のとき $s \leq 4$
 $y \leq 0$ のとき $t \leq 6$
 であるから、
 注文量が小さいときは、X だけに注文するのがよい。
 しかし、注文量が増加すると、X の調理時間 s は大きくなり、
 いずれ 6 を超える。こうなったら、Y にも注文するとよい。
 すなわち、 $X \rightarrow Y$ の順に注文すべきである。

$a=2$ のとき すべて X に注文すると $(x=2, y=0)$ 。

$$T=s=4+\frac{2}{3} \cdot 2=\frac{16}{3}<6$$

よって、すべて X に注文すべきである。

$$\underline{x=2, y=0, T=\frac{16}{3}}$$

$a=6$ のとき すべて X に注文すると $(x=6, y=0)$ 。

$$T=s=4+\frac{2}{3} \cdot 6=8>6$$

よって Y にも注文すべきである。 $(x>0, y>0)$ のとき、

$$\begin{cases} s=4+\frac{2}{3}x \\ t=6+\frac{1}{3}y=6+\frac{1}{3}(6-x)=8-\frac{1}{3}x \\ s=t \Leftrightarrow 4+\frac{2}{3}x=8-\frac{1}{3}x \\ \Leftrightarrow x=4 \left(y=2, T=\frac{20}{3} \right) \end{cases}$$

すなわち、

$$\underline{x=4, y=2, T=\frac{20}{3}}$$

- (A-2) すべて X に注文すると $(x=a, y=0)$ 。

$$T=s=4+\frac{2}{3}a$$

よって、

(i) $4+\frac{2}{3}a \leq 6$ ($a \leq 3$) なら、すべて X に注文すべきである。

(ii) $4+\frac{2}{3}a > 6$ ($a > 3$) なら、Y にも注文すべきである。

すなわち、

求める条件は、 $a \geq 3$

- (A-3) (A-2)(ii)において $(a>3$ のとき)、

X, Y の両方に注文すべきであり、

$$\begin{cases} s=4+\frac{2}{3}x \\ t=6+\frac{1}{3}y=6+\frac{1}{3}(a-x)=6+\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}x \end{cases}$$

$$s=t \Leftrightarrow 4+\frac{2}{3}x=6+\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}x$$

$$\Leftrightarrow x=2+\frac{1}{3}a$$

$$\begin{pmatrix} y=-2+\frac{2}{3}a \\ T=4+\frac{2}{3}\left(2+\frac{1}{3}a\right) \\ =\frac{16}{3}+\frac{2}{9}a \end{pmatrix}$$

よって、X または Y にすべて注文し、Z に注文しないなら、

$$T=\begin{cases} 4+\frac{2}{3}a & (a \leq 3) \\ \frac{16}{3}+\frac{2}{9}a & (a > 3) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

さて、

$$x \leq 0 \text{ のとき, } s \leq 4$$

$$y \leq 0 \text{ のとき, } t \leq 6$$

$$z \leq 0 \text{ のとき, } u \leq 7$$

であるから、 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ の順に注文すべきである。特に、

$$\textcircled{1} \text{ の } T \leq 7$$

ならば、すべて X, Y に注文し、Z に注文しない方がよい。

- (ア) $a \leq 3$ のとき、 $\textcircled{1}$ の $T=4+\frac{2}{3}a \leq 6$ が成立する。

よって、X, Y のみに注文すべきである。

$$\text{よって、} T=4+\frac{2}{3}a$$

- (イ) $a > 3$ のとき、 $\textcircled{1}$ の $T=\frac{16}{3}+\frac{2}{9}a$ であり、

$$\frac{16}{3}+\frac{2}{9}a \leq 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}a \leq \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{15}{2}$$

であるから、

- (イ-1) $3 < a \leq \frac{15}{2}$ なら、X, Y のみに注文すべきであり、

$$T=\frac{16}{3}+\frac{2}{9}a$$

- (イ-2) $a > \frac{15}{2}$ なら、X, Y ばかりではなく Z にも注文すべきである。

このとき、X, Y, Z すべてに注文することになる。

よって $x, y, z > 0$

このとき、

$$\begin{cases} s=4+\frac{2}{3}x \\ t=6+\frac{1}{3}y \\ u=7+z \\ x+y+z=a \end{cases}$$

であり、

$$s=t=u$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{11}a+\frac{27}{11} \\ y=\frac{6}{11}a-\frac{12}{11} \\ z=\frac{2}{11}a-\frac{15}{11} \\ \left(T=\frac{2}{11}a+\frac{62}{11} \right) \end{cases}$$

以上により、

$$T=\begin{cases} \frac{2}{3}a+4 & (0 < a \leq 3) \\ \frac{2}{9}a+\frac{16}{3} & \left(3 < a \leq \frac{15}{2} \right) \\ \frac{2}{11}a+\frac{62}{11} & \left(\frac{15}{2} < a \right) \end{cases}$$

B

- (B-1) X の来客数を a とする。

- (a) $x < y$ のとき

$$a=\frac{x+y}{2}$$

X を x から x' に移動したときの X の来客数を a' とすると、

$x' < y$ なる x' に対し、

$$a'=\frac{x'+y}{2}$$

よって $x < x' < y$ なる x' に対し、

$$a < a'$$

となる。よって a を増加させることができる。

- (b) $x=y$ のとき

$$a=\frac{1}{2}$$

$x=y < \frac{1}{2}$ のとき、 $x < x' < 1$ なる x' をとれば、

$$a'=1-\frac{x'+y}{2}$$

であるから、

$$a'-a=\frac{1-x'-y}{2}$$

$$a' > a \Leftrightarrow x'+y < 1$$

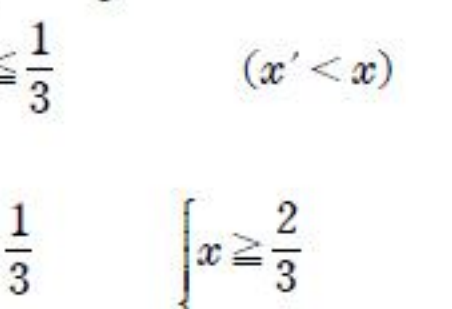
$x=y < \frac{1}{2}$ のとき、 $x < 1-y$ であるから、

$$\begin{cases} x'+y < 1 \\ x < x' < 1 \end{cases} \quad (\text{すなわち } x < x' < 1-y)$$

なる x' が存在する。よって、 a を増加させることができる。

$x=y > \frac{1}{2}$ のとき

左右を逆にすれば、 $x=y < \frac{1}{2}$ の場合に帰着し、 a を増加させることができることがわかる。



- (c) $x=y=\frac{1}{2}$ のとき、 $a=\frac{1}{2}$ 。

対称性により、Y を固定して X を動かす場合だけ考えればよい。

$\frac{1}{2} < x'$ のとき、

$$a'=1-\frac{x'+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}-\frac{x'}{2}$$

$$a'-a=\frac{1}{4}-\frac{x'}{2}<0$$

よって、 a は増加しない。

$x' < \frac{1}{2}$ のとき、左右を逆にすれば、 $x' > \frac{1}{2}$ の場合に帰着し、やはり a は増加しないことがわかる。

- (B-2) (a) $x < y \leq z$ の下で、

$$a=\frac{x+y}{2}$$

a は x の増加関数であるから、 $x < y \leq z$ なる x, y, z は均衡ではない。

- (b) $x=y=z$ の下で

$$a=\frac{1}{3}$$

X を x から x' に移動すると、

$$a'=\begin{cases} 1-\frac{x'+x}{2} & (x' > x) \\ \frac{x'+x}{2} & (x' < x) \end{cases}$$

均衡条件は、

$$a' \leq a \quad (\text{すべての } x')$$

すなわち、

$$\begin{cases} 1-\frac{x'+x}{2} \leq \frac{1}{3} & (x' > x) \\ \frac{x'+x}{2} \leq \frac{1}{3} & (x' < x) \end{cases}$$

よって、

$$\begin{cases} 1-x \leq \frac{1}{3} & \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

これは不成立。よって $x=y=z$ なる x, y, z は均衡ではない。(証明終)

- (B-3) 4 店 X, Y, Z, W の位置を x, y, z, w で表す。

(B-1)(a) の議論と対称性により、

$$x < y \leq z \leq w, \text{ または } x \leq y \leq z < w$$

の場合には均衡にならない。

また、 $x=y=z=w$ のとき、(B-2)(b) と同様に均衡条件は、

$$x \geq \frac{3}{4} \quad \text{かつ} \quad x \leq \frac{1}{4}$$

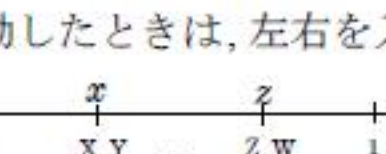
となり矛盾。したがって、この場合も均衡にならない。

上記の場合を除くと、 $x=y < z=w$ の場合が残る。

$$\text{このとき、} a=\frac{1}{2} \cdot \frac{x+z}{2}=\frac{x+z}{4}$$

この状態が均衡となる条件を求める。

まず、店 Y, Z, W の位置を固定し、X の位置だけ x から x' に動かす。



$0 \leq x' < x$ のとき、

$$a'=\frac{x'+x}{2} \quad (x' \text{ の増加関数})$$

$x < x' < z$ のとき、

$$a'=\frac{x'+z}{2}-\frac{x'+x}{2}=\frac{z-x}{2} \quad (\text{一定})$$

$x'=z$ のとき、

$$a'=\frac{1}{3}\left(1-\frac{z+x}{2}\right)$$

$z < x' \leq 1$ のとき、

$$a'=1-\frac{x'+z}{2} \quad (x' \text{ の減少関数})$$

よって均衡条件は、

$$\begin{cases} \frac{x'+x}{2} \leq \frac{x+z}{4} & (0 \leq x' < x) & \dots \textcircled{1} \\ \frac{z-x}{2} \leq \frac{x+z}{4} & (x < x' < z) & \dots \textcircled{2} \\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{z+x}{2}\right) \leq \frac{x+z}{4} & (x'=z) & \dots \textcircled{3} \\ 1-\frac{x'+z}{2} \leq \frac{x+z}{4} & (z < x' \leq 1) & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x \leq \frac{x+z}{4} \quad \Leftrightarrow 3x \leq z$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 2(z-x) \leq x+z \Leftrightarrow z \leq 3x$$

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow 4\left(1-\frac{z+x}{2}\right) \leq 3(x+z) \Leftrightarrow 4 \leq 5x+5z$$

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow 1-z \leq \frac{x+z}{4} \quad \Leftrightarrow 4(1-z) \leq x+z$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq x+5z$$

よって、

$$\begin{cases} z=3x & \dots \textcircled{5} \\ \frac{1}{4} \leq x & \dots \textcircled{6} \end{cases}$$

Y を移動した場合も同様である。

Z を移動したときは、左右を入れかえて考えれば

⑤, ⑥に対応して、

$$\begin{cases} 1-x=3(1-z) \\ \frac{1}{4} \leq 1-z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3z-2 & \dots \textcircled{7} \\ z \leq \frac{3}{4} & \dots \textcircled{8} \end{cases}$$

W を移動した場合も同様である。

⑤, ⑥, ⑦, ⑧より、

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ z=\frac{3}{4} \end{cases}$$

すなわち、均衡は存在し、

$$\underline{x=y=\frac{1}{4}, z=w=\frac{3}{4} \text{ のみである。}}$$

(A-1) 与えられた条件より、

$$\begin{cases} a_{n+1} = (1-p-q)a_n + qb_n + pd_n & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ b_{n+1} = (1-p-q)b_n + qc_n + pa_n & \cdots\cdots\textcircled{2} \\ c_{n+1} = (1-p-q)c_n + qd_n + pb_n & \cdots\cdots\textcircled{3} \\ d_{n+1} = (1-p-q)d_n + qa_n + pc_n & \cdots\cdots\textcircled{4} \end{cases}$$

となる。

(A-2) $n=0$ に対しても、 $X_0 = a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a + b + c + d$ と定める。

このとき、 $\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4}$ より、

$$X_{n+1} = (1-p-q)X_n + qX_n + pX_n = X_n$$

が、 $n=0, 1, 2, \dots$ に対して成り立つ。

よって、 $X_n = X_0 = a + b + c + d$

は n によらない値である。

(A-3) $\textcircled{1} + \textcircled{3} - (\textcircled{2} + \textcircled{4})$ より、

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= (1-p-q)Y_n - qY_n - pY_n \\ &= (1-2p-2q)Y_n \end{aligned}$$

となる。

$$Y_{n+1} = (1-2p-2q)Y_n$$

(A-4) $a_n + c_n = \frac{1}{2}(X_n + Y_n)$

$$= \frac{1}{2}Y_n + \frac{1}{2}(a + b + c + d)$$

となるから、 $a_n + c_n$ が収束する必要十分条件は Y_n が収束すること。

また、 $Y_n = (1-2p-2q)^n(a + c - b - d)$ であるから、 Y_n が a, b, c, d によらずに

収束するための必要十分条件は、

$$-1 < 1-2p-2q \leq 1 \quad \therefore (0 \leq) p+q < 1$$

である。

また、そのときの $a_n + c_n$ の極限值は、

$$p+q=0 \text{ のとき, } \frac{1}{2}(a+c-b-d) + \frac{1}{2}(a+b+c+d) = a+c$$

$$0 < p+q < 1 \text{ のとき, } \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}(a+b+c+d) = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$$

となる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{条件:} & 0 \leq p+q < 1 \\ \text{極限值} = & \begin{cases} a+c & p=q=0 \\ \frac{1}{2}(a+b+c+d) & 0 < p+q < 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

(A-5) $\textcircled{1} - \textcircled{3}$, $\textcircled{2} - \textcircled{4}$ の両辺を平方して加えると、

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= \{(1-p-q)(a_n - c_n) + (q-p)(b_n - d_n)\}^2 \\ &\quad + \{(1-p-q)(b_n - d_n) + (p-q)(a_n - c_n)\}^2 \\ &= \{(1-p-q)^2 + (q-p)^2\} Z_n \end{aligned}$$

となる。したがって、 $K = (1-p-q)^2 + (q-p)^2$ となる。

(A-6) $K = 2 \left\{ \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{1}{2} \right)^2 \right\}$ と変形できるから、

$$0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1 \text{ より, } 0 \leq \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}, 0 \leq \left(q - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

したがって、 $0 \leq K \leq 1$ となり、 Z_n は常に収束することがわかる。

$K=1$ となるのは、 $0 \leq p+q \leq 1$ に注意すると、 $(p, q) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$ の

ときなので、 Z_n の極限值は、

$$\begin{cases} (a-c)^2 + (b-d)^2 & (p, q) = (0, 0), (1, 0), (0, 1) \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

となる。

(A-7) a_n, b_n, c_n, d_n が、 a, b, c, d によらずに収束するとき、 $a_n + c_n$ も収束する。

よって、(A-4) より、 $0 \leq p+q < 1$ でなければならない。

逆に $0 \leq p+q < 1$ とする。

(i) $p+q=0$ のとき

このとき、 $p=q=0$ であるから、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, c_n \rightarrow c, d_n \rightarrow d$$

と収束する。

(ii) $0 < p+q < 1$ のとき

再び (A-4) より、 $a_n + c_n$ は $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ に収束。

また、 $0 \leq (a_n - c_n)^2 \leq Z_n$ であるから、(A-6) より、はさみうちの原理から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - c_n)^2 = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - c_n) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } a_n &= \frac{1}{2}\{(a_n + c_n) + (a_n - c_n)\} \rightarrow \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(a+b+c+d) + 0\right\} \\ &= \frac{1}{4}(a+b+c+d) \quad (n \rightarrow \infty) \\ c_n &= \frac{1}{2}\{(a_n + c_n) - (a_n - c_n)\} \rightarrow \frac{1}{4}(a+b+c+d) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

と収束することがわかる。

$$\text{さらに, } b_n + d_n = X_n - (a_n + c_n) \rightarrow \frac{1}{2}(a+b+c+d) \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから、同様にして、 b_n, d_n も $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\frac{1}{4}(a+b+c+d)$ に収束

することがわかる。

以上より、

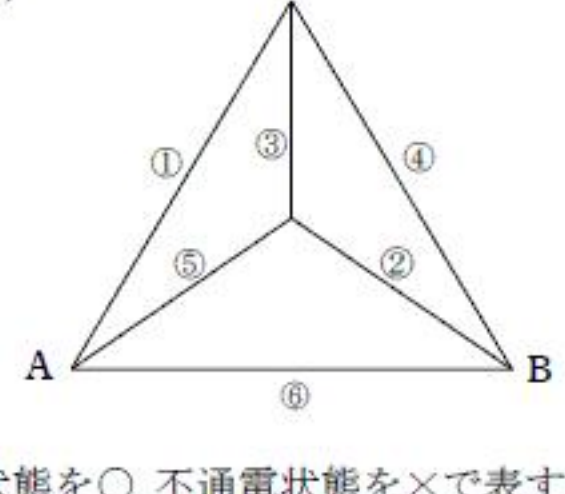
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{条件:} & p+q < 1 \\ a_n \text{ の極限值} = & \begin{cases} a & p=q=0 \text{ のとき} \\ \frac{1}{4}(a+b+c+d) & 0 < p+q < 1 \text{ のとき} \end{cases} \end{array} \right.$$

と求まる。

B

(B-1) 6本の送電線に番号をつけ、それぞれについて、通電状態を○、

不通電状態を×で表す。



また A についても、通電状態を○、不通電状態を×で表す。

(ア) ①が○のとき、Aは○となる。

(ア)において A が○となる確率は p

(イ) ①が×、②が○のとき、

A が○となる

⇔

③または④が○

かつ

⑤または⑥が○

③または④が○となる確率は、余事象を考え $1 - q^2$ である。

⑤または⑥が○となる確率も $1 - q^2$ である。

よって、

(イ)において A が○となる確率は、 $qp(1 - q^2)^2$

(ウ) ①が×、②が×のとき、

A が○となる

⇔

③と⑤が○

または

④と⑥が○

③と⑤が○となる確率は、 p^2

④と⑥が○となる確率は、 p^2

上記の少なくとも一方が起きる確率は、 $1 - (1 - p^2)^2 = 2p^2 - p^4$

(ウ)において A が○となる確率は、 $q^2(2p^2 - p^4)$

以上により、

$$\alpha = p + qp(1 - q^2)^2 + q^2(2p^2 - p^4)$$

(注) $p+q=1$ の関係があるので、

α は様々な形に表せる。 p だけで表せば、

$$\alpha = p + 2p^2 - 7p^4 + 7p^5 - 2p^6$$

となる。

(B-2) 右図のようにA, Bを定める。

(i) A が○かつ B が×のとき

その確率は、 $\alpha - \beta$ 。また

A から C に通電している確率は α

なので、求める確率は、

$$(\alpha - \beta) \cdot \alpha$$

(ii) A が×かつ B が○のとき

対称性から (i) と同様にして、

$$(\alpha - \beta) \cdot \alpha$$

(iii) A, B ともに○のとき

その確率は β であり、A または B の少なくとも一方から C に通電していれば

よいので、余事象を考えて、求める確率は、

$$\beta \cdot \{1 - (1 - \alpha)^2\}$$

以上、(i) ~ (iii) より、求める確率は、

$$(\alpha - \beta) \cdot \alpha + (\alpha - \beta) \cdot \alpha + \beta \{1 - (1 - \alpha)^2\}$$

$$= \alpha^2(2 - \beta)$$

となる。

