

第1問

与えられた方程式を y について整理すると,

$$3y^2 + (4x+5)y + 2(x^2 + 2x - 2) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x のとり得る値は, $\textcircled{1}$ を満たす実数 y が存在するような x の値である.

よって, 判別式

$$\begin{aligned}(4x+5)^2 - 4 \times 3 \times 2(x^2 + 2x - 2) &\geq 0 \\ -8x^2 - 8x + 73 &\geq 0\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}x^2 + x - \frac{73}{8} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{4} &\leq x \leq -\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

すなわち, x の最大値は $-\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{6}}{4}$ (答)

第2問

AC の傾きが $-\frac{1}{t}$ より CD の傾きは $\frac{1}{t}$

D の座標を求める.

直線 AB, CD の方程式はそれぞれ

$$y = -x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{1}{t}(x - t) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

とおける.

①, ②を解いて,

$$-x + 1 = \frac{1}{t}(x - t)$$

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)x = 2$$

$$x = \frac{2t}{t+1}$$

また, y 座標は $y = \frac{1-t}{t+1}$ であるから,

$\triangle ACO$ の面積は $\frac{t}{2}$, $\triangle BCD$ の面積は $\frac{(1-t)^2}{2(t+1)}$ より,

$\triangle ACD$ の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - \frac{(1-t)^2}{2(t+1)} \\ &= \frac{t+1-t^2-t-1+2t-t^2}{2(t+1)} \\ &= \frac{t-t^2}{t+1} \\ &= -t + 2 - \frac{2}{t+1} \\ &= 3 - \left\{ (t+1) + \frac{2}{t+1} \right\} \end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の関係より,

$$\begin{aligned} t+1 + \frac{2}{t+1} &\geq 2\sqrt{(t+1) \cdot \frac{2}{t+1}} \geq 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow -\left\{ (t+1) + \frac{2}{t+1} \right\} &\leq -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

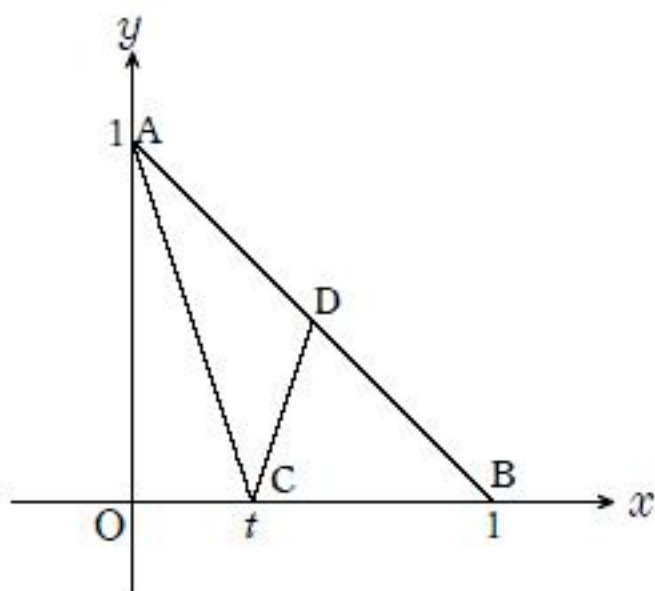
等号成立は, $t+1 = \frac{2}{t+1}$ かつ $0 < t < 1$

つまり, $t = \sqrt{2} - 1$ のとき

$$\therefore S \leq 3 - 2\sqrt{2}$$

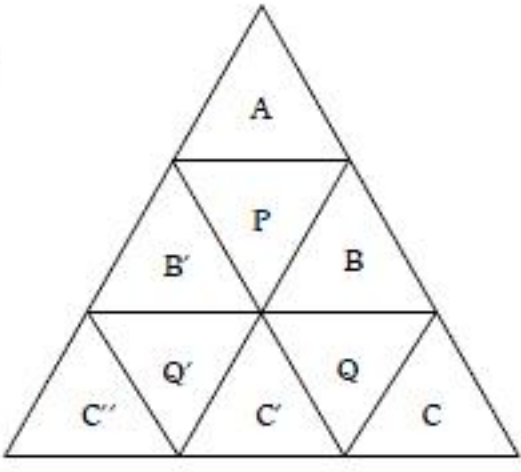
よって, 求める最大値は $3 - 2\sqrt{2}$

.....(答)



第3問

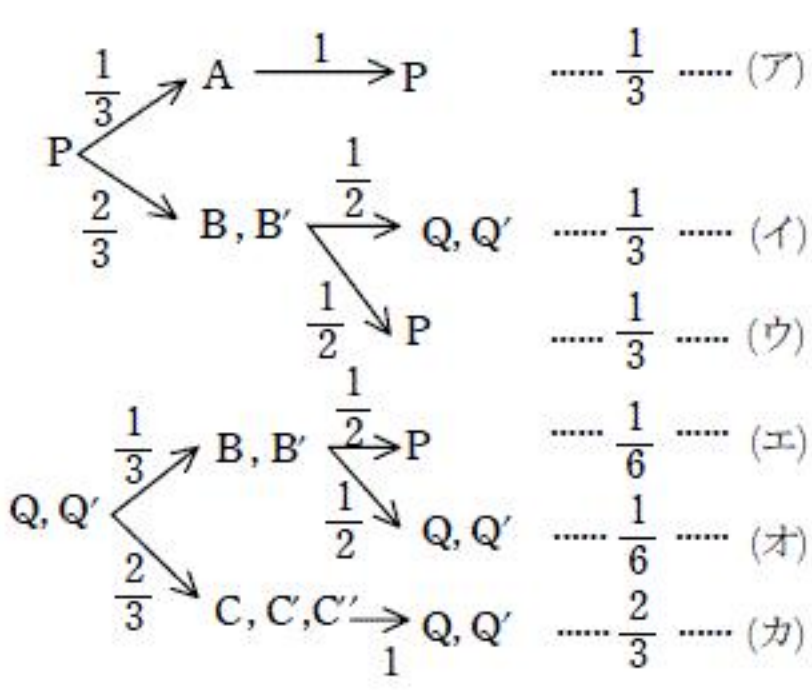
右図のように、各部屋に名前をつける。
1秒毎に球は



- $P \rightarrow A, B, B'$
- $\rightarrow P, Q, Q'$
- $\rightarrow A, B, B', C, C', C''$
- $\rightarrow P, Q, Q' \rightarrow \dots\dots$

と移動する。これより、 $I = \{P, Q, Q'\}$ 、 $J = \{A, B, B', C, C', C''\}$ とおくと、 I の点にあるときは、1秒後には必ず J の点に移り、その逆も成り立つ。したがって、

「球が P, Q, Q' にあるのは偶数秒後に限る。」……(*)
 n 秒後に P にある確率を p_n 、 Q または Q' にある確率を q_n とおく。
 $2k$ 秒後から $2k+2$ 秒後の移動を考える。



以上より、 $2k+2$ 秒後に P にあるのは(ア)、(ウ)、(エ)、
 Q にあるのは(イ)、(オ)、(カ)である。

$$\therefore \begin{cases} p_{2k+2} = \frac{2}{3}p_{2k} + \frac{1}{6}q_{2k} & \dots\dots ① \\ q_{2k+2} = \frac{1}{3}p_{2k} + \frac{5}{6}q_{2k} & \dots\dots ② \end{cases}$$

ここで、 $p_{2m} = a_m$ 、 $q_{2m} = b_m$ ($m = 1, 2, \dots\dots$)
とおくと、(*)により、
 $a_m + b_m = 1$

②より、

$$\begin{aligned} b_{m+1} &= \frac{1}{3}a_m + \frac{5}{6}b_m = \frac{1}{3}(1-b_m) + \frac{5}{6}b_m \\ &= \frac{1}{2}b_m + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{m+1} - \frac{2}{3} &= \frac{1}{2}\left(b_m - \frac{2}{3}\right) \\ b_m - \frac{2}{3} &= \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(b_0 - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

$$b_0 = 0 \text{ より、 } b_m = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \right\}$$

部屋の左右の対称性より、 $2m$ 秒後に球が Q にある確率 Q_{2m} は

$$Q_{2m} = \frac{1}{2}q_{2m} = \frac{1}{2}b_m = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \right\}$$

したがって、(*)と合わせると、 n 秒後に球が Q にある確率 Q_n は、

$$Q_n = \begin{cases} \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \right\} & (n \text{ が偶数}) \\ 0 & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \dots\dots(\text{答})$$

第4問

(1) $C: y = x^2 + 1$ ……①上の点 $P(p, p^2 + 1)$ における接線の方程式は
 $y = 2p(x - p) + p^2 + 1 \quad \therefore y = 2px - p^2 + 1$ ……②

②が点 (s, t) を通るとき、

$$t = 2ps - p^2 + 1 \quad \therefore p^2 - 2sp + t - 1 = 0 \quad \text{……③}$$

③より、 (s, t) から C に引いた接線の接点の x 座標 p は

$$p = s \pm \sqrt{s^2 - t + 1} \quad \text{……④}$$

したがって、 l_1, l_2 の方程式は②に④を代入して

$$y = 2(s + \sqrt{s^2 - t + 1})x - (s + \sqrt{s^2 - t + 1})^2 + 1 \quad \text{……⑤}$$

……(答)

$$y = 2(s - \sqrt{s^2 - t + 1})x - (s - \sqrt{s^2 - t + 1})^2 + 1 \quad \text{……⑥}$$

……(答)

(2) $\alpha = s - \sqrt{s^2 - t + 1}, \quad \beta = s + \sqrt{s^2 - t + 1}$

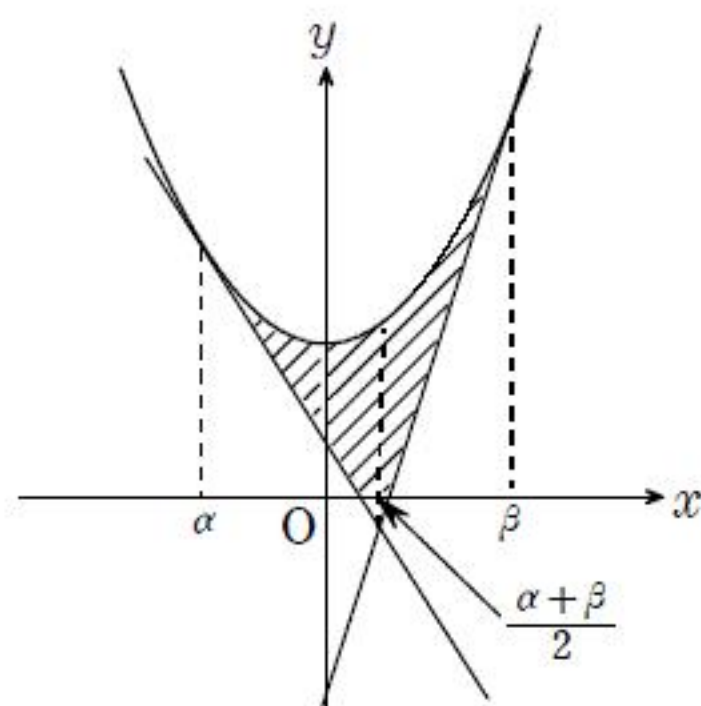
とおくと、⑥、⑤はそれぞれ

$$y = 2\alpha x - \alpha^2 + 1 \quad \text{……⑥'}$$

$$y = 2\beta x - \beta^2 + 1 \quad \text{……⑤'}$$

となり、⑤'、⑥'の交点の x 座標は、 $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ である。

したがって、 C と l_1, l_2 で囲まれる部分の面積を S とすると、



$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{x^2 + 1 - (2\alpha x - \alpha^2 + 1)\} dx \\ &\quad + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{x^2 + 1 - (2\beta x - \beta^2 + 1)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x - \alpha)^2 dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x - \beta)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \left[\frac{1}{3} (x - \beta)^3 \right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \\ &= \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{12} (2\sqrt{s^2 - t + 1})^3 \\ &= \frac{2}{3} (s^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$S = a \text{ のとき, } \frac{2}{3} (s^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}} = a$$

$$\therefore s^2 - t + 1 = \left(\frac{3}{2} a \right)^{\frac{2}{3}} \iff t = s^2 + 1 - \left(\frac{3}{2} a \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$1 - \left(\frac{3}{2} a \right)^{\frac{2}{3}} \geq 0 \iff 0 < a \leq \frac{2}{3} \text{ のとき,}$$

$$t = s^2 + 1 - \left(\frac{3}{2} a \right)^{\frac{2}{3}} \geq 0 \text{ より, } t < 0 \text{ を満たす } (s, t) \text{ は存在しない.}$$

……(答)

$$1 - \left(\frac{3}{2} a \right)^{\frac{2}{3}} < 0 \iff a > \frac{2}{3} \text{ のとき,}$$

$$t = s^2 + 1 - \left(\frac{3}{2} a \right)^{\frac{2}{3}} \text{ かつ } t < 0 \text{ を満たす } (s, t) \text{ が求める部分である.}$$

……(答)