

第1問

l と円の交点のうち、 O でないものを A 、

l と $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ の交点を B とし、円の中心を

O' とする。

OA の中点を M とすると、 $O'M \perp OA$ 、

$OO' = 1$ 。

$\angle O'OA = \frac{\pi}{2} - \theta$ より、 $OM = \sin \theta$

$$\therefore OA = 2 \sin \theta$$

また、 $OB = \frac{\sqrt{2}}{3 \cos \theta}$

$$\therefore L = AB = OA - OB = 2 \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{3 \cos \theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = 2 \cos \theta - \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{3 \cos^2 \theta} = \frac{6 \cos^3 \theta - \sqrt{2} \sin \theta}{3 \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^3 \theta \left(6 - \sqrt{2} \tan \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \right)}{3 \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \theta \{ 3\sqrt{2} - \tan \theta (\tan^2 \theta + 1) \}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \theta (\sqrt{2} - \tan \theta) (3 + \sqrt{2} \tan \theta + \tan^2 \theta)$$

円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ と直線 $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ との交点の y 座標は、

$$y = 1 \pm \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{3 - \sqrt{7}}{3} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{7}}{\sqrt{2}}, \quad \tan \beta = \frac{3 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}, \quad 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

を満たす α 、 β をとると、 θ の変域は $\alpha < \theta < \beta$

$$3 - \sqrt{7} < 2 < 3 + \sqrt{7} \quad \therefore \frac{3 - \sqrt{7}}{\sqrt{2}} < \sqrt{2} < \frac{3 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

よって、 $\tan \theta_0 = \sqrt{2}$ を満たす θ_0 は $\alpha < \theta_0 < \beta$ を満たす。

L が最大になるとき、 $\tan \theta_0 = \sqrt{2}$ より $\cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

θ	(α)	$\dots$	θ_0	$\dots$	(β)
$\frac{dL}{d\theta}$		+	0	-	
L		$\nearrow$		$\searrow$	

また、このとき L の最大値は

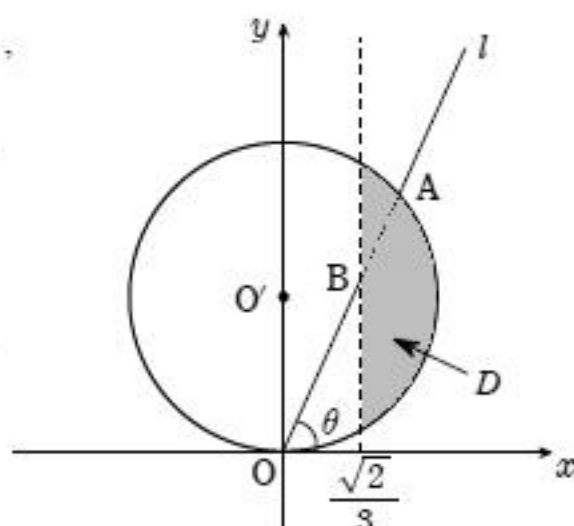
$$L = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

であり、

$$\cos \theta = \cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(注)
$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\theta} &= \frac{6 \cos^3 \theta - \sqrt{2} \sin \theta}{3 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{36 \cos^6 \theta - 2 \sin^2 \theta}{3 \cos^2 \theta (6 \cos^3 \theta + \sqrt{2} \sin \theta)} \\ &= \frac{36 \cos^6 \theta + 2 \cos^2 \theta - 2}{3 \cos^2 \theta (6 \cos^3 \theta + \sqrt{2} \sin \theta)} \\ &= \frac{2(6 \cos^4 \theta + 2 \cos^2 \theta + 1)(3 \cos^2 \theta - 1)}{3 \cos^2 \theta (6 \cos^3 \theta + \sqrt{2} \sin \theta)} \end{aligned}$$

これを用いると、 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき L は最大となることが分かる。

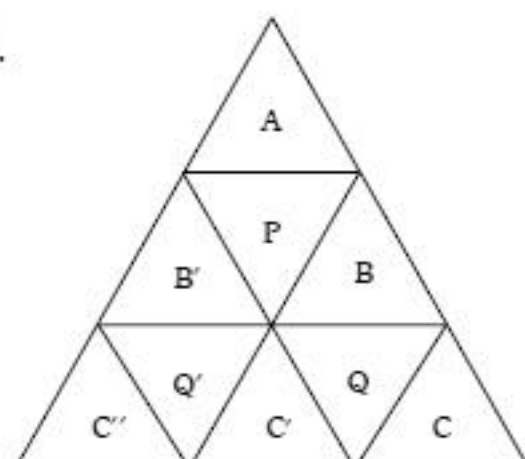


第2問

右図のように、各部屋に名前をつける.

1秒毎に球は

$$\begin{aligned} P &\rightarrow A, B, B' \\ &\rightarrow P, Q, Q' \\ &\rightarrow A, B, B', C, C', C'' \\ &\rightarrow P, Q, Q' \rightarrow \dots \end{aligned}$$

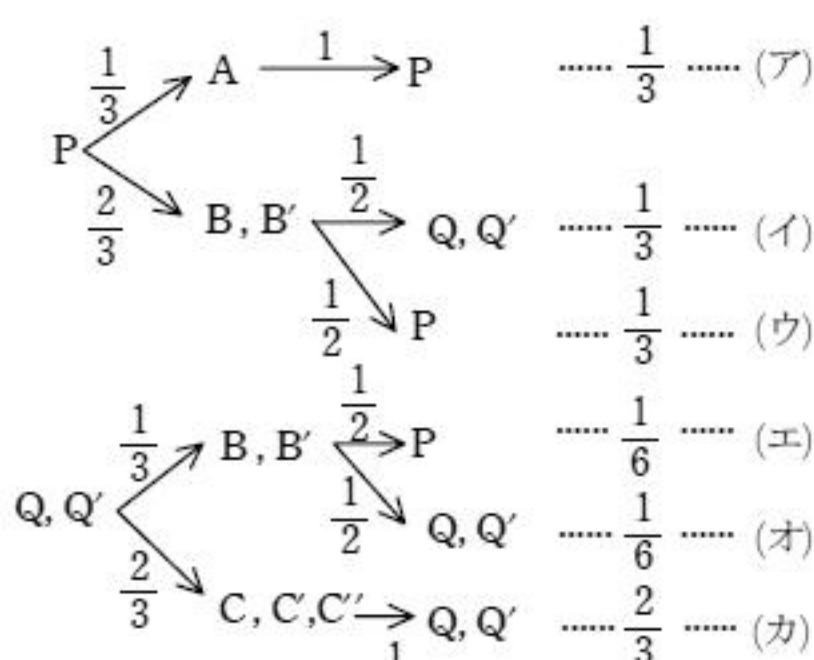


と移動する. これより, $I = \{P, Q, Q'\}$, $J = \{A, B, B', C, C', C''\}$ とおくと, I の点にあるときは, 1秒後には必ず J の点に移り, その逆も成り立つ. したがって,

「球が P, Q, Q' にあるのは偶数秒後に限る.」 ……(*)

n 秒後に P にある確率を p_n , Q または Q' にある確率を q_n とおく.

$2k$ 秒後から $2k+2$ 秒後の移動を考える.



以上より, $2k+2$ 秒後に P にあるのは(ア), (ウ), (エ), Q にあるのは(イ), (オ), (カ)である.

$$\therefore \begin{cases} p_{2k+2} = \frac{2}{3}p_{2k} + \frac{1}{6}q_{2k} & \dots\dots ① \\ q_{2k+2} = \frac{1}{3}p_{2k} + \frac{5}{6}q_{2k} & \dots\dots ② \end{cases}$$

ここで, $p_{2m} = a_m$, $q_{2m} = b_m$ ($m=1, 2, \dots$)

とおくと, (*)により,

$$a_m + b_m = 1$$

②より,

$$\begin{aligned} b_{m+1} &= \frac{1}{3}a_m + \frac{5}{6}b_m = \frac{1}{3}(1-b_m) + \frac{5}{6}b_m \\ &= \frac{1}{2}b_m + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$b_{m+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(b_m - \frac{2}{3}\right)$$

$$b_m - \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(b_0 - \frac{2}{3}\right)$$

$$b_0 = 0 \text{ より, } b_m = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \right\}$$

部屋の左右の対称性より, $2m$ 秒後に球が Q にある確率 Q_{2m} は

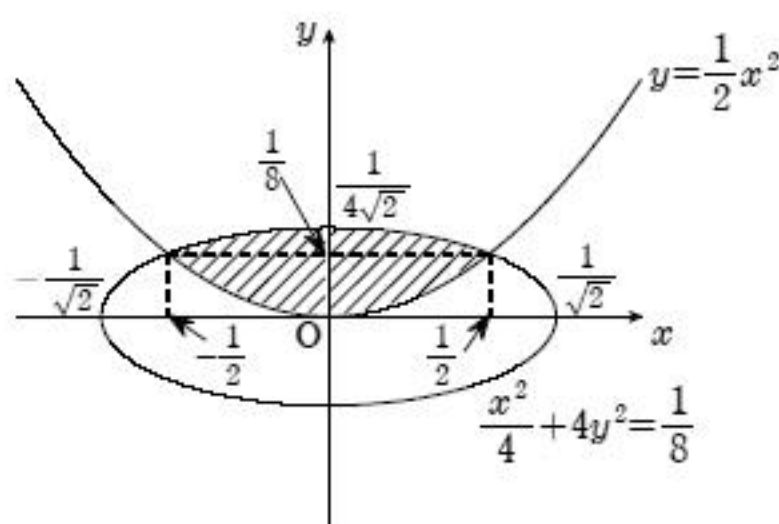
$$Q_{2m} = \frac{1}{2}q_{2m} = \frac{1}{2}b_m = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \right\}$$

したがって, (*)と合わせると, n 秒後に球が Q にある確率 Q_n は,

$$Q_n = \begin{cases} \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \right\} & (n \text{ が偶数}) \\ 0 & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \dots\dots(\text{答})$$

第3問

(1)



S は y 軸に関して対称であるから

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{32} - \frac{x^2}{16} \right) dx - 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} x^2 \right)^2 dx \\
 &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - x^2 \right) dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^4 dx \\
 &= \frac{\pi}{8} \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{11}{480} \pi
 \end{aligned}$$

.....(答)

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \pi \int_0^{\frac{1}{8}} 2y dy + \pi \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - 16y^2 \right) dy \\
 &= \pi \left[y^2 \right]_0^{\frac{1}{8}} + \pi \left[\frac{1}{2} y - \frac{16}{3} y^3 \right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4\sqrt{2}}} \\
 &= \left(\frac{1}{12\sqrt{2}} - \frac{7}{192} \right) \pi \\
 &= \frac{8\sqrt{2} - 7}{192} \pi
 \end{aligned}$$

.....(答)

(2) (1)より,

$$\begin{aligned}
 \frac{V_2}{V_1} &= \left(\frac{8\sqrt{2} - 7}{192} \right) \cdot \frac{480}{11} \\
 &= \frac{40\sqrt{2} - 35}{22}
 \end{aligned}$$

.....(答)

ここで, $\frac{V_2}{V_1} - 1$ を計算すると,

$$\frac{V_2}{V_1} - 1 = \frac{40\sqrt{2} - 57}{22}$$

ここで, $(40\sqrt{2})^2 = 3200$, $57^2 = 3249$ より,

$$40\sqrt{2} < 57$$

よって,

$$\frac{V_2}{V_1} < 1$$

.....(答)

第4問

- (1) $1 \cdot 2 = 2$ は明らかに n 乗数ではない. 連続する 2 個の整数を $k, k+1$ ($k \geq 2$) とし, $k(k+1)$ が n 乗数であるとする.

k の素因数の 1 つを p とすると, k と $k+1$ は互いに素であるから, p は $k+1$ と互いに素. ……(A)

$k(k+1)$ は p で割り切れる n 乗数であるから, p でちょうど $n \times (\text{整数})$ 回割り切れる. ……(B)

(A), (B) より k は p でちょうど $n \times (\text{整数})$ 回割り切れる. k の他の素因数についても, 同様であるから k は n 乗数である.

同様にして, $k+1$ も n 乗数である.

したがって, $k = l^n$, $k+1 = m^n$ ($l, m \in \mathbb{N}$) と表され, $k+1 > k$ より $m > l \geq 1$ であるから

$$\begin{aligned} m^n - l^n &= (m-l)(m^{n-1} + m^{n-2}l + \dots + l^{n-1}) \\ &\geq 1 \cdot (2+1) = 3 \end{aligned}$$

これは $m^n - l^n = (k+1) - k = 1$ と矛盾.

よって, 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でない. (証明終)

- (2) $n=2$ の場合は(1)で示したので, 以下, $n \geq 3$ とする.

$k \in \mathbb{N}$ とし, $k(k+1) \dots (k+n-1)$ が n 乗数であるとする.

$$k^n < k(k+1) \dots (k+n-1) < (k+n-1)^n$$

より,

$$k(k+1) \dots (k+n-1) = (k+s)^n \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad (1 \leq s \leq n-2, s \in \mathbb{N})$$

となる s が存在する.

①の左辺の積の中に $k+s+1$ が含まれているので,

$k+s+1$ ($\geq 1+1+1=3$) の素因数の 1 つ p をとると, ①の左辺は p の倍数である.

ここで, $k+s$ と $k+s+1$ は互いに素であるから $k+s$ は p の倍数ではない. したがって, ①の右辺 $(k+s)^n$ も p の倍数でないので矛盾.

よって, 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でない. (証明終)

(1) $O(0, 0)$, $P(a, b)$, $Q(a+c, b+d)$, $R(c, d)$ とするとき,

$\overrightarrow{OP} = (a, b)$, $\overrightarrow{OR} = (c, d)$ を2辺とする平行四辺形 $OPQR$ の面積は $|ad - bc|$ である.

よって, 条件(D)は $|ad - bc| = 1$ (a, b, c, d は整数) と同値である.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$$

BA について, $|(a+c)d - (b+d)c| = |ad - bc| = 1$

$B^{-1}A$ について, $|(a-c)d - (b-d)c| = |ad - bc| = 1$

ゆえに, BA , $B^{-1}A$ はともに条件(D)を満たす.

(証明終)

(2) $c=0$ より $|ad| = 1$ なので,

$$(a, d) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+d \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-d \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

A に B , B^{-1} を左からかけると右上の成分だけが d , $-d$ だけ変化する.
 $|d| = 1$ であることから,

b と d が同符号のときは, B^{-1} を左から $|b|$ 回

b と d が異符号のときは, B を左から $|b|$ 回

$b=0$ のときは, B , B^{-1} を左から順に

かけると, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のいずれかになる.

(証明終)

(3) BA について, $|x| + |z| = |a+c| + |c|$,

$B^{-1}A$ について, $|x| + |z| = |a-c| + |c|$ なので,

$$|a+c| + |c| < |a| + |c| \quad \text{または} \quad |a-c| + |c| < |a| + |c|$$

つまり, $|a+c| < |a|$ または $|a-c| < |a|$ ……(*)

が成り立つことを示すとよい.

$|a| \geq |c| > 0$ であるから,

a と c が異符号のとき

$$|a+c| = ||a| - |c|| = |a| - |c| < |a|$$

a と c が同符号のとき

$$|a-c| = ||a| - |c|| = |a| - |c| < |a|$$

したがって, (*) が成り立つ.

(証明終)

(注) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A = ad - bc$ を用いると, a, b, c, d

が整数のもとで

$$\text{条件(D)} \iff \det A = \pm 1$$

ここで,

$$\det(BA) = \det B \det A = 1 \cdot \det A = \det A$$

$$\det(B^{-1}A) = \det B^{-1} \det A = 1 \cdot \det A = \det A$$

を用いると, (1) は明らかである.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad U(t)AU(-t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos t & a \sin t \\ -b \sin t & b \cos t \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a \cos^2 t + b \sin^2 t & (a-b) \sin t \cos t \\ (a-b) \sin t \cos t & a \sin^2 t + b \cos^2 t \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$$U(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U(-x) = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 U(t)AU(-t) - B &= \begin{pmatrix} (a-b) \cos^2 t & (a-b) \sin t \cos t \\ (a-b) \sin t \cos t & -(a-b) \cos^2 t \end{pmatrix} \\
 &= (a-b) \begin{pmatrix} \cos^2 t & \sin t \cos t \\ \sin t \cos t & -\cos^2 t \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= \text{Tr} \left\{ (a-b) \begin{pmatrix} \cos^2 t & \sin t \cos t \\ \sin t \cos t & -\cos^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix} \right\} \\
 &= (a-b) (2 \cos^2 t \cos 2x + 2 \sin t \cos t \sin 2x) \\
 &= 2(a-b) \cos t (\cos 2x \cos t + \sin 2x \sin t) \\
 &= 2(a-b) \cos t \cos(2x-t)
 \end{aligned}$$

$-1 \leq \cos(2x-t) \leq 1$ より, $f(x)$ の最大値は

$$m(t) = 2(a-b)|\cos t| \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) $U(t)CU(-t)$ は①において, a, b を a^e, b^e に置き換えたものであるから,

$$\begin{aligned}
 &2 \text{Tr}(U(t)CU(-t)D) \\
 &= 2 \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} a^e \cos^2 t + b^e \sin^2 t & (a^e - b^e) \sin t \cos t \\ (a^e - b^e) \sin t \cos t & a^e \sin^2 t + b^e \cos^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{1-e} & 0 \\ 0 & a^{1-e} \end{pmatrix} \right\} \\
 &= 2 \left\{ b \left(\frac{a}{b} \right)^e \cos^2 t + b \sin^2 t + a \sin^2 t + a \left(\frac{b}{a} \right)^e \cos^2 t \right\} \\
 &= 2(a+b) \sin^2 t + 2 \left\{ a \left(\frac{b}{a} \right)^e + b \left(\frac{a}{b} \right)^e \right\} \cos^2 t
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{より, } \text{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t) = 2(a+b) - 2(a-b)|\cos t|$$

以上より,

$$\begin{aligned}
 S &= (\text{左辺}) - (\text{右辺}) \\
 &= 2(a+b) \sin^2 t + 2 \left\{ a \left(\frac{b}{a} \right)^e + b \left(\frac{a}{b} \right)^e \right\} \cos^2 t \\
 &\quad - \{2(a+b) - 2(a-b)|\cos t|\} \\
 &= -2(a+b) \cos^2 t + 2 \left\{ a \left(\frac{b}{a} \right)^e + b \left(\frac{a}{b} \right)^e \right\} \cos^2 t \\
 &\quad + 2(a-b)|\cos t|
 \end{aligned}$$

ここで, (相加平均) $\geq$ (相乗平均) より,

$$a \left(\frac{b}{a} \right)^e + b \left(\frac{a}{b} \right)^e \geq 2 \sqrt{a \left(\frac{b}{a} \right)^e b \left(\frac{a}{b} \right)^e} = 2\sqrt{ab}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 S &\geq -2(a+b) \cos^2 t + 2 \cdot 2\sqrt{ab} \cos^2 t + 2(a-b)|\cos t| \\
 &= -2(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 |\cos t|^2 + 2(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})|\cos t| \\
 &= 2(\sqrt{a} - \sqrt{b})|\cos t| \{ -(\sqrt{a} - \sqrt{b})|\cos t| + \sqrt{a} + \sqrt{b} \} \\
 &= 2(\sqrt{a} - \sqrt{b})|\cos t| \{ \sqrt{a}(1 - |\cos t|) + \sqrt{b}(1 + |\cos t|) \}
 \end{aligned}$$

$a \geq b > 0$, $|\cos t| \leq 1$ より,

$$S \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad (\text{左辺}) \geq (\text{右辺}) \quad (\text{証明終})$$

(注) 一般に, 2次正方行列 M, N について,

$$\text{Tr}(M \pm N) = \text{Tr}(M) \pm \text{Tr}(N)$$

$$\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$$

が成立する. この事実を用いると, 次のように少し見通しが良くなる.

$$(1) \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{とおく.}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \text{Tr}(U(t)AU(-t)U(x)JU(-x)) \\
 &\quad - \text{Tr}(BU(x)JU(-x)) \\
 &= \text{Tr}(U(-x)U(t)AU(-t)U(x)J) \\
 &\quad - \text{Tr}(BU(x)JU(-x)) \\
 &= \text{Tr}(U(-x+t)AU(x-t)J) - \text{Tr}(BU(x)JU(-x)) \\
 &= \text{Tr}(AU(x-t)JU(-x+t)) - \text{Tr}(BU(x)JU(-x))
 \end{aligned}$$

ここで, $U(x)JU(-x) = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(BU(x)JU(-x)) &= (b-a) \cos 2x \\
 \text{Tr}(AU(x-t)JU(-x+t)) &= (a-b) \cos(2x-2t) \\
 \therefore f(x) &= (a-b)(\cos(2x-2t) + \cos 2x) \\
 &= 2(a-b) \cos(2x-t) \cos t
 \end{aligned}$$

$$\therefore m(t) = 2(a-b)|\cos t|$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \text{Tr}(U(t)AU(-t) + B) \\
 &= \text{Tr}(AU(-t)U(t)) + \text{Tr} B \\
 &= \text{Tr}(A + B) \\
 &= 2(a+b)
 \end{aligned}$$