

第1問

A

(A-1)

生産者 B は利潤 $pS - H(S)$ 円を最大にするように S を決定する。ここで、

$$\begin{aligned} pS - H(S) &= pS - \alpha S^2 \\ &= -\alpha \left(S - \frac{p}{2\alpha} \right)^2 + \frac{p^2}{4\alpha} \end{aligned}$$

であるから、生産者 B が決定する S は、

$$S = \frac{p}{2\alpha}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{p}{2\alpha}$$

(A-2)

消費者 C は $U(D) - qD$ 円を最大にするように D を決定する。ここで、

$$\begin{aligned} U(D) - qD &= \beta \sqrt{D} - qD \\ &= -q \left(\sqrt{D} - \frac{\beta}{2q} \right)^2 + \frac{\beta^2}{4q} \end{aligned}$$

であるから、消費者 C が決定する D は、

$$\sqrt{D} = \frac{\beta}{2q} \quad \therefore D = \frac{\beta^2}{4q^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad D = \frac{\beta^2}{4q^2}$$

(A-3)

(A-1), (A-2)より

$$D - S = \frac{\beta^2}{4q^2} - \frac{p}{2\alpha} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

であり、これに、

$$\text{データ 1 : } p = 4, q = 5 \text{ のとき, } D - S = 10$$

$$\text{データ 2 : } p = 5, q = 10 \text{ のとき, } S - D = 10 \Leftrightarrow D - S = -10$$

をそれぞれ代入すると、

$$\frac{\beta^2}{100} - \frac{4}{2\alpha} = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{\beta^2}{400} - \frac{5}{2\alpha} = -10 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。② - ③ $\times 4$ より

$$\frac{1}{2\alpha} (-4 + 5 \cdot 4) = 50 \quad \therefore \alpha = \frac{4}{25}$$

と求まり、この α を②に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{100} - \frac{25}{2} &= 10 \\ \Leftrightarrow \beta^2 &= 2250 \\ \therefore \beta &= 15\sqrt{10} \quad (\because \beta > 0) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{4}{25}, \beta = 15\sqrt{10}$$

(A-4)

①式に、

$$\text{データ 3 : } p = 10, q = 10 \text{ のとき, } S = D \Leftrightarrow D - S = 0$$

を代入することにより、

$$\frac{\beta^2}{400} - \frac{10}{2\alpha} = 0 \quad \therefore \beta^2 = \frac{2000}{\alpha}$$

とわかる。このとき、

$$\begin{aligned} D &\leq S \\ \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4q^2} &\leq \frac{p}{2\alpha} \\ \Leftrightarrow \frac{500}{\alpha q^2} &\leq \frac{p}{2\alpha} \\ \Leftrightarrow p &\geq \frac{1000}{q^2} \quad (\because \alpha > 0) \end{aligned}$$

と整理されるから、需要 D が供給 S を上回らない条件の下で、 $qD - pS$ は

$$\begin{aligned} qD - pS &= \frac{\beta^2}{4q} - \frac{p^2}{2\alpha} \\ &= \frac{500}{\alpha q} - \frac{p^2}{2\alpha} \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1000}{q} - p^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{2\alpha} \left\{ \frac{1000}{q} - \left(\frac{1000}{q^2} \right)^2 \right\} \quad (\text{等号成立は } p = \frac{1000}{q^2} \text{ のとき}) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $qD - pS$ を最大にするような p, q を求めるには、 $r = \frac{1}{q} (r > 0)$ として、

$$\begin{aligned} f(r) &= 1000r - (1000r^2)^2 \\ &= 1000(r - 1000r^4) \end{aligned}$$

が最大となるような r を求めればよい。ここで、

$$f'(r) = 1000(1 - 4000r^3)$$

であるから、 $f(r)$ の増減表は次のようになり、

r	(0)	...	$\frac{1}{10\sqrt[3]{4}}$	...
$f'(r)$		+	0	-
$f(r)$		/	最大	\

$f(r)$ は $r = \frac{1}{10\sqrt[3]{4}}$ のときに最大値をとることがわかる。よって、 $f(r)$ を最大にするには、

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{r} = 10\sqrt[3]{4} \\ p &= \frac{1000}{q^2} = 1000 \cdot \frac{1}{100\sqrt[3]{16}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2} \end{aligned}$$

ととればよいことがわかる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}, q = 10\sqrt[3]{4}$$

B

(B-1)

A さんの方法では $x = l$ ($l = 1, 2, \dots, N-1$) であるときは、重さを決定するまでに使用する天秤の回数は l 回であるから、 $x = N-1$ のときに最大で、 $N-1$ 回使用する。また、 $x = N$ のときも、 $N-1$ 回の使用で判定できる。したがって、A さんの方法での天秤の使用回数の最大値は $N-1$ である。

$$(\text{答}) \quad N-1$$

(B-2)

(B-1)での議論より、求める期待値は、

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{N-1} l \cdot \frac{1}{N} + (N-1) \cdot \frac{1}{N} &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{2} N(N-1) + (N-1) \right\} \\ &= \frac{(N-1)(N+2)}{2N} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{(N-1)(N+2)}{2N}$$

(B-3)

まず、 x を必ず決定するのに必要な天秤の使用回数は、 x の取りうる範囲の幅で決まる、つまり、 x が $l, l+1, \dots, N$ のいずれかであるときと、 $1, 2, \dots, N-l+1$ のいずれかであるときとでは、必要な使用回数は等しくなることに注意する。

以下、 $N = 2^m$ とするときに、B さんの方法で重さ x を決定するのに必要な天秤の使用回数が m であることを数学的帰納法により示す。

[1] $m=1$ のとき

$$\frac{N+1}{2} = \frac{3}{2} \text{ を超えない最大の整数は } 1 \text{ であり、このとき、1 回で } x=1 \text{ か } 2 \text{ かを判定できる}$$

から、 $m=1$ のとき、主張は成り立つ。

[2] $m=p$ のとき成り立つと仮定して、 $m=p+1$ のとき

$$\frac{N+1}{2} = 2^p + \frac{1}{2} \text{ を超えない最大の整数は } 2^p \text{ であり、したがって、} x \leq 2^p \text{ であっても、} x \geq 2^p + 1 \text{ であっても、1 回の使用で、} x \text{ の取りうる範囲の幅はちょうど半分 of } 2^p \text{ に狭められる。よって、帰納法の仮定より、このさきの必要回数は、} p \text{ 回であるから、合わせて、} p+1 \text{ 回必要である。よって } m=p+1 \text{ のときも成立。}$$

以上、[1], [2]より、求める使用回数は m であることが示された。

$$(\text{答}) \quad m$$

(B-4)

天秤を 9 回用いるとすると、その結果は 2^9 通りしか存在しない。よって、 2^9 より多くの種類の x を区別することは不可能である。よって

$$N \leq 2^9$$

$N=1000$ は上式を満たさないので、 $N=1000$ のとき、天秤を 9 回用いて x を決定する方法は存在しない。

(証明終)

(B-5)

1 回目に $k=128$ として天秤に乗せる。

[1] $x \leq 128$ だったとき

$128 = 2^7$ であるから、このあと B さんの方法を用いてあと 7 回で x が決定できる。

[2] $x \geq 129$ だったとき

2 回目に $k=192$ として天秤に乗せる。

[i] $129 \leq x \leq 192$ だったとき

$192 - 129 + 1 = 64 = 2^6$ であるから、このあと、B さんの方法を用いて、あと 6 回で x が決定できる。

[ii] $x \geq 193$ だったとき

$2^9 < 1000 - 193 + 1 \leq 2^{10}$ であるから、このあと、B さんの方法を用いて、あと 10 回以下で x が決定できる。

以上、[1], [2]をまとめると、

$$1 \leq x \leq 128 \text{ のとき} \quad 8 \text{ 回}$$

$$129 \leq x \leq 192 \text{ のとき} \quad 8 \text{ 回}$$

$$193 \leq x \text{ のとき} \quad 12 \text{ 回以下}$$

で x を決定できることがわかる。したがって、天秤の使用回数の期待値は

$$\frac{128}{250} \cdot 8 + \frac{64}{250} \cdot 8 + \frac{8}{250} \cdot 12 + \frac{800}{4000} \cdot 12 = 8.928$$

以下となり、この方法を用いれば期待値を 9 以下にすることができる。

$$(\text{答}) \quad \text{上記方法}$$

第2問

A

(A-1)

$\overrightarrow{\text{OE}} = \overrightarrow{\text{OO}'} + \overrightarrow{\text{O'E}}$ であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OO}'} &= (l_1 \cos \theta_1, l_1 \sin \theta_1) \\ \overrightarrow{\text{O'E}} &= (l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2), l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2))\end{aligned}$$

なので

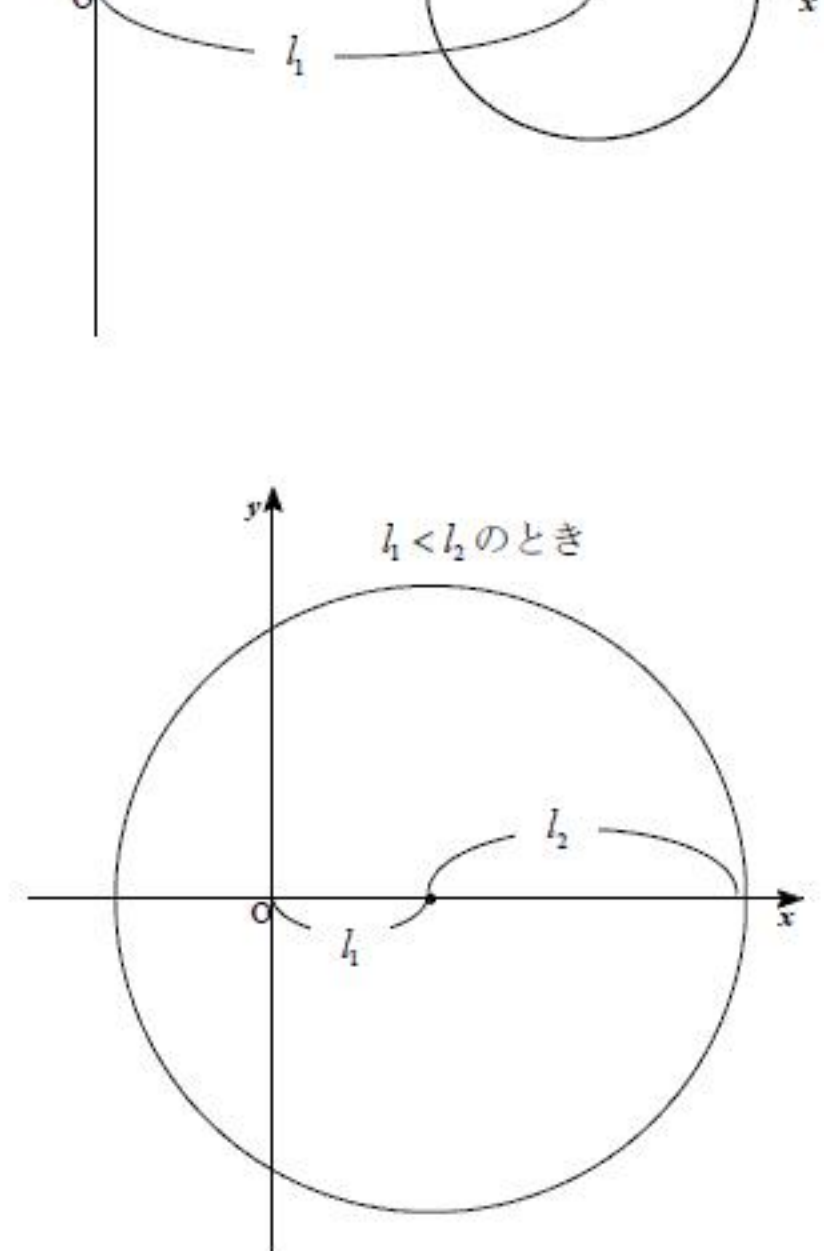
$$\overrightarrow{\text{OE}} = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2), l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2))$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2), l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2))$$

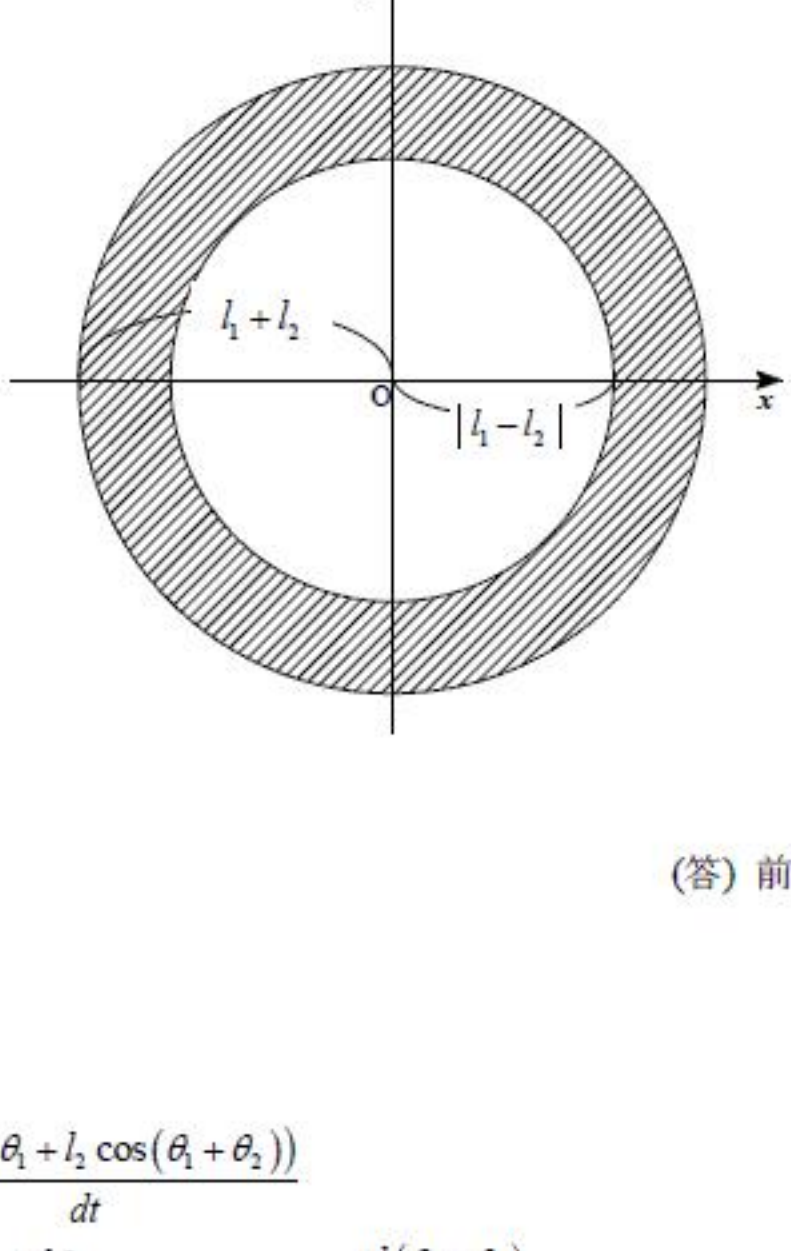
(A-2)

θ_1, θ_2 が自由にとれることより求める領域は、以下の図形が原点中心に一回転したときに通過する領域と等しい。



以上より求める領域は以下の境界を含む斜線部で表される。

ただし、 $l_1 = l_2$ のときは、外側の円の周および内部となる。



(答) 前図斜線部 (境界を含む)

(A-3)

(A-1) より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2))}{dt} \\ &= -l_1 \sin \theta_1 \cdot \frac{d\theta_1}{dt} - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \cdot \frac{d(\theta_1 + \theta_2)}{dt} \\ &= (-l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)) \cdot \frac{d\theta_1}{dt} - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \cdot \frac{d\theta_2}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d(l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2))}{dt} \\ &= l_1 \cos \theta_1 \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \cdot \frac{d(\theta_1 + \theta_2)}{dt} \\ &= (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)) \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \cdot \frac{d\theta_2}{dt}\end{aligned}$$

となる。

よって

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

(A-4)

$ad - bc = 0$ より

$$\begin{aligned}(-l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)) l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) - (-l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)) (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)) &= 0 \\ \Leftrightarrow -l_1 \sin \theta_1 \cdot l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos \theta_1 \cdot l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin ((\theta_1 + \theta_2) - \theta_1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \theta_2 &= 0\end{aligned}$$

となる。

よって、 θ_2 は 0 または π である。

(答) $\theta_2 = 0$ または π

$\theta_2 = 0$ のとき、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \{ -(l_1 + l_2) \sin \theta_1 \} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} - (l_2 \sin \theta_1) \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = - \left\{ (l_1 + l_2) \frac{d\theta_1}{dt} + l_2 \frac{d\theta_2}{dt} \right\} \sin \theta_1 \\ \frac{dy}{dt} = \{ (l_1 + l_2) \cos \theta_1 \} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + (l_2 \cos \theta_1) \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = \left\{ (l_1 + l_2) \frac{d\theta_1}{dt} + l_2 \frac{d\theta_2}{dt} \right\} \cos \theta_1 \end{cases}$$

であり、 $\theta_2 = \pi$ のとき、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \{ (-l_1 + l_2) \sin \theta_1 \} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + (l_2 \sin \theta_1) \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = - \left\{ (l_1 - l_2) \frac{d\theta_1}{dt} - l_2 \frac{d\theta_2}{dt} \right\} \sin \theta_1 \\ \frac{dy}{dt} = \{ (l_1 - l_2) \cos \theta_1 \} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} - (l_2 \cos \theta_1) \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = \left\{ (l_1 - l_2) \frac{d\theta_1}{dt} - l_2 \frac{d\theta_2}{dt} \right\} \cos \theta_1 \end{cases}$$

となる。いずれの場合も

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} \cdot \cos \theta_1 + \frac{dy}{dt} \cdot \sin \theta_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) &\perp (\cos \theta_1, \sin \theta_1)\end{aligned}$$

これはすなわち、手先 E の速度ベクトルが棒 L_1 と直交するということである。

(答) 手先 E の速度ベクトルが棒 L_1 と直交する方向に制限される。

(A-5)

(A-3) で求めた $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ について、 $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$ とすれば $\vec{u}$ が得られ、 $\frac{d\theta_2}{dt} = 0$ とすれば $\vec{v}$ が得られる。

よって

$$\vec{u} = \left(a \frac{d\theta_1}{dt}, c \frac{d\theta_1}{dt} \right), \vec{v} = \left(b \frac{d\theta_2}{dt}, d \frac{d\theta_2}{dt} \right)$$

となる。

これらのベクトルが直交することより、

$$ab + cd = 0$$

となる。

よって

$$\begin{aligned}(l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)) l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) + (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)) l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow l_1 \sin \theta_1 \sin (\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos \theta_1 \cos (\theta_1 + \theta_2) + l_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow l_1 \cos \theta_2 + l_2 &= 0\end{aligned}$$

となる。

ここで $\cos \theta_2$ は $-1 \leq \cos \theta_2 \leq 1$ をとるので、直交し得る条件は

$$l_2 \leq l_1$$

である。

(答) $l_2 \leq l_1$

B

(B-1)

1 回の操作ごとに、得られる図形の面積は $\frac{8}{9}$ 倍になる。

F_0 の面積は 1 であるから、一辺の長さ $\frac{1}{9}$ のユニットで覆うと、

$$1 + \left(\frac{1}{9} \right)^2 = 81 \quad \text{個}$$

を要する。同様に、 F_1 の面積は $\frac{8}{9}$ 、 F_2 の面積は $\left(\frac{8}{9} \right)^2$ であるから、それぞれ

$$\begin{aligned}\frac{8}{9} + \left(\frac{1}{9} \right)^2 &= 72 \quad \text{個} \\ \left(\frac{8}{9} \right)^2 + \left(\frac{1}{9} \right)^2 &= 64 \quad \text{個}\end{aligned}$$

を要する。さらに、 F_3 以降を覆うのに要する個数は、明らかに 64 個で一定となる。

(答) F_0 は 81 個、 F_1 は 72 個、 F_2 以降は 64 個

(B-2)

一辺の長さ $\frac{1}{3^m}$ のユニットで各図形を覆うのに必要な個数は、 F_m 以降に対して一定となる。

F_m の面積は $\left(\frac{8}{9} \right)^m$ であるから、これを覆うのに必要な個数 $n(B)$ は、

$$n(B) = \left(\frac{8}{9} \right)^m \div \left(\frac{1}{3^m} \right)^2 = 8^m$$

である。

(答) $n(B) = 8^m$

(B-3)

(B-2) の答を用いると、

$$\frac{n(B)}{B^D} = \frac{8^m}{3^{mD}} = \left(\frac{8}{3^D} \right)^m$$

となる。

[1] $3^D < 8$ のとき

$$m \text{ を限りなく大きくすると、} \frac{n(B)}{B^D} \text{ は無限大に発散する。}$$

[2] $3^D = 8$ のとき

$$m \text{ の値によらず、} \frac{n(B)}{B^D} = 1 \text{ である。}$$

[3] $3^D > 8$ のとき

$$m \text{ を限りなく大きくすると、} \frac{n(B)}{B^D} \text{ は 0 に収束する。}$$

以上、[1]、[2]、[3] より、 $\frac{n(B)}{B^D}$ が正の実数に収束するのは $3^D = 8$ のとき、すなわち $D = \log_3 8$ のときである。

(答) $D = \log_3 8$

(B-4)

G_{m+2} は、 G_{m+1} の一辺を $\frac{1}{2}$ に縮小した図形 3 つと、 G_m の一辺を $\frac{1}{4}$ に縮小した図形 3 つから構成されている。このことから、

$$N_{m+2} = 3N_{m+1} + 3N_m$$

であることが分かる。

(答) $N_{m+2} = 3N_{m+1} + 3N_m$

(別解)

一辺の長さが $\frac{1}{2^m}$ の正方形ユニットで図形 G_m を覆うことを考える。

G_m を構成する一辺の長さ $\frac{1}{2^m}$ の正方形ユニットのうち、欠損のないものが a_m 個、欠損のあるものが b_m 個であるとする。 G_{m+1} を作るとき、

欠損のない正方形ユニット 1 個から、(一辺の長さが $\frac{1}{2^{m+1}}$ の)

欠損のない正方形ユニットが 3 個、

欠損のある正方形ユニットが 1 個生じ、

欠損のある正方形ユニット 1 個から、(一辺の長さが $\frac{1}{2^{m+1}}$ の)

欠損のない正方形ユニットが 3 個生じる。

よって、

$$\begin{cases} a_{m+1} = 3a_m + 3b_m & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b_{m+1} = a_m & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

また

$$N_m = a_m + b_m \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

と表せる。

①、② より

$$\begin{aligned}a_{m+2} &= 3a_{m+1} + 3b_{m+1} \\ &= 3a_{m+1} + 3a_m \quad \cdots \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

①、③ より

$$N_m = \frac{1}{3} a_{m+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

よって、

$$\begin{aligned}N_{m+2} &= \frac{1}{3} a_{m+3} \\ &= a_{m+2} + a_{m+1} \quad (\textcircled{4} \text{ による}) \\ &= 3N_{m+1} + 3N_m \quad (\textcircled{5} \text{ による})\end{aligned}$$

(答) $N_{m+2} = 3N_{m+1} + 3N_m$

(B-5)

$N_{m+2} = 3N_{m+1} + 3N_m$ の両辺を $\alpha^m (> 0)$ で割ると、

$$\alpha^2 \cdot \frac{N_{m+2}}{\alpha^{m+2}} = 3\alpha \cdot \frac{N_{m+1}}{\alpha^{m+1}} + 3 \cdot \frac{N_m}{\alpha^m}$$

を得る。 $\frac{N_m}{\alpha^m}$ が正の極限值 p に収束すると仮定すると、

$$\alpha^2 p = 3\alpha p + 3p$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}\alpha^2 - 3\alpha - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \quad (\because \alpha > 0)\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

(B-6)

問題文に述べられている考え方に基づくと、 $\frac{N_m}{2^{mD}}$ が正の実数に収束するような D が、求める次元である。(B-5) より、 $2^D = \alpha$ のとき、すなわち $D = \log_2 \alpha$ のときに $\frac{N_m}{2^{mD}}$ は正の実数に収束する。

(答) $D = \log_2 \alpha$