

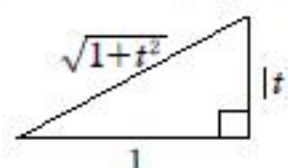
第1問

$C: y = x^3 - 4x^2 + 3x$ と $l: y = tx$ の共有点を調べる.

$$x(x^2 - 4x + 3 - t) = 0 \iff x = 0, 2 \pm \sqrt{1+t} \quad (t \geq -1)$$

ここで、直線 l の傾きが t であることから、 $|\overline{OP}|$, $|\overline{OQ}|$ は P , Q の x 座標 x_P , $x_Q (= 2 \pm \sqrt{1+t})$ を用いて、

$$|x_P| \sqrt{1+t^2}, |x_Q| \sqrt{1+t^2}$$



となる. よって、

$$\begin{aligned} g(t) &= |\overline{OP}| |\overline{OQ}| \\ &= |x_P x_Q| (1+t^2) \\ &= |3-t| (1+t^2) \\ &= \begin{cases} -t^3 + 3t^2 - t + 3 & (-1 \leq t \leq 3) \\ t^3 - 3t^2 + t - 3 & (3 \leq t) \end{cases} \end{aligned}$$

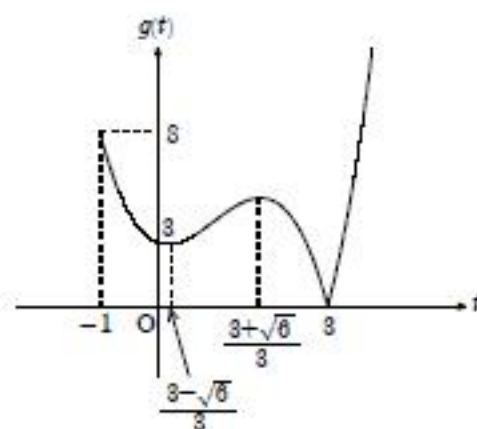
$$g'(t) = \begin{cases} -3t^2 + 6t - 1 & (-1 < t < 3) \\ 3t^2 - 6t + 1 & (3 < t) \end{cases}$$

$$g'(t) = 0 \iff t = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$$

よって、増減表は右表のようになり、
 $g(t)$ の極値は以下の通りとなる.

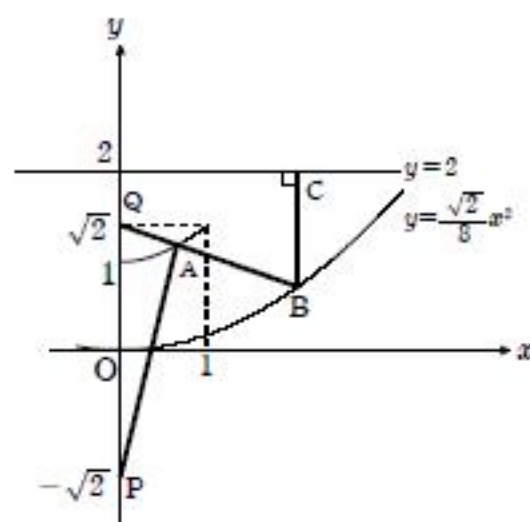
t	-1	$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$	3	
$g'(t)$		$-$	$+$	$-$	$+$
$g(t)$		$\searrow$ 極小 $\nearrow$	極大 $\searrow$	極小 $\nearrow$	

$$\begin{cases} \text{極大値} & g\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right) = 4 + \frac{4}{9}\sqrt{6} \\ \text{極小値} & g\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right) = 4 - \frac{4}{9}\sqrt{6}, \quad g(3) = 0 \end{cases}$$



第2問

$$\begin{aligned}
 (1) \quad PA &= \sqrt{a^2 + (\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{2})^2} \\
 &= \sqrt{2a^2 + 3 + 2\sqrt{2a^2 + 2}} \\
 &= \sqrt{2a^2 + 2 + 2\sqrt{2a^2 + 2} + 1} \\
 &= \sqrt{(\sqrt{2a^2 + 2} + 1)^2} \\
 &= \sqrt{2a^2 + 2} + 1
 \end{aligned}$$



同様に,

$$AQ = \sqrt{a^2 + (\sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2a^2 + 2} - 1$$

$$\text{よって, } PA - AQ = \sqrt{2a^2 + 2} + 1 - (\sqrt{2a^2 + 2} - 1) = 2 \quad (= \text{一定}) \quad \blacksquare$$

(2) Q, A, B は一直線上にあるため(1)の結果を用いて,

$$\begin{aligned}
 PA + AB + BC &= 2 + AQ + AB + BC \\
 &= 2 + QB + BC \quad \dots\dots(*)
 \end{aligned}$$

半直線 AQ: $y = \frac{\sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{2}}{a}x + \sqrt{2} \quad (x \geq 0)$ と放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ の交点を $B\left(x_B, \frac{\sqrt{2}}{8}x_B^2\right)$ とおく.

図より, A は $y \leq \sqrt{2}$ にあり, B は $x \geq 0, y < 2$ にあって,

$$QB = \sqrt{x_B^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{8}x_B^2 - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{8}x_B^2 + \sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{8}x_B^2 + \sqrt{2}$$

$$BC = 2 - \frac{\sqrt{2}}{8}x_B^2$$

よって, (*) より,

$$\begin{aligned}
 PA + AB + BC &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{8}x_B^2 + \sqrt{2} + 2 - \frac{\sqrt{2}}{8}x_B^2 \\
 &= 4 + \sqrt{2} \quad (= \text{一定}) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

第3問

$$z = (x-a)^2 + (y-b)^2 - (a^2 + b^2) \quad (\text{以下、円 } C: x^2 + y^2 = 25, \text{ 直線 } l: 2x + y = 5 \text{ とする})$$

$A(a, b)$ とし、 $D: x^2 + y^2 \leq 25, 2x + y \leq 5$ 内の点 $P(x, y)$ を考えると

$$z = AP^2 - (a^2 + b^2)$$

したがって、 A から D の点 P までの距離の最小値を L とおくと、

$$(z \text{ の最小値 } m) = L^2 - (a^2 + b^2)$$

ここで、 C と l の2交点を $Q(0, 5), R(4, -3)$ とする。

(i)

$$a^2 + b^2 \geq 25 \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} a \leq 0 \\ \text{または} \\ 3a + 4b \leq 0 \end{cases} \quad \text{のとき}$$

線分 OA は $\widehat{QR}$ ($(-5, 0)$ を含む方) と交わるので、

P がその交点のとき、 AP は最小となる。

$$m = (OA - 5)^2 - (a^2 + b^2) = 25 - 10\sqrt{a^2 + b^2}$$

(ii) $2a + b \geq 5$ かつ $\frac{1}{2}a - 5 \leq b \leq \frac{1}{2}a + 5$ のとき、

A から直線 l に下ろした垂線の足と P が一致したとき、

AP は最小となる。

$$m = \left(\frac{2a + b - 5}{\sqrt{5}} \right)^2 - (a^2 + b^2) = 5 - 4a - 2b - \frac{(a - 2b)^2}{5}$$

(iii) $a \geq 0$ かつ $b \geq \frac{1}{2}a + 5$ のとき、

P が $Q(0, 5)$ のとき、 AP は最小となる。

$$m = 25 - 10b$$

(iv) $3a + 4b \geq 0$ かつ $b \leq \frac{1}{2}a - 5$ のとき、

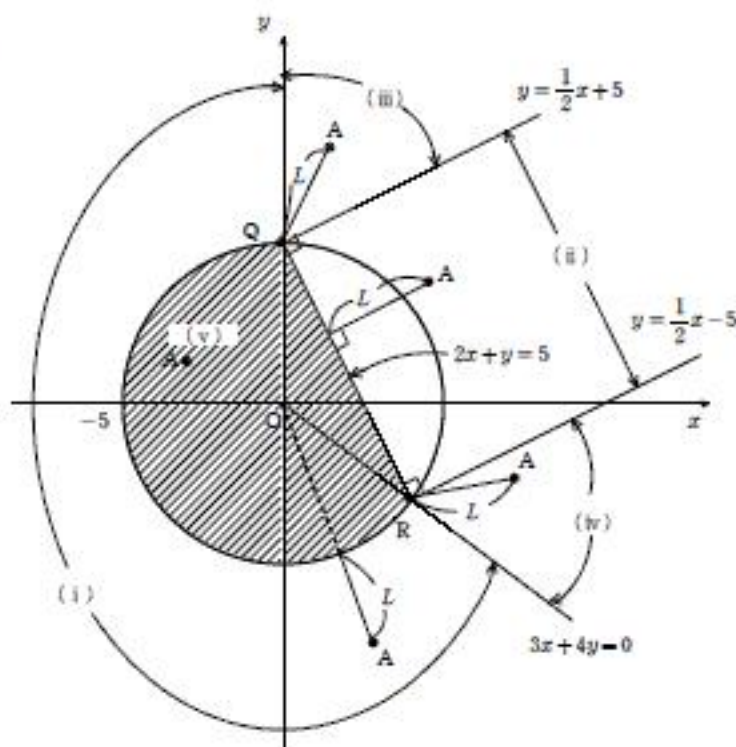
P が $R(4, -3)$ のとき、 AP は最小となる。

$$m = 25 - 8a + 6b$$

(v) $a^2 + b^2 \leq 25$ かつ $2a + b \leq 5$ のとき、

$P = A$ のとき、 AP は最小となる。

$$m = -(a^2 + b^2)$$



第4問

(i), (ii)より, 表が出るまでは奇数回目, 偶数回目にはそれぞれ A, B が投げ, 表が 1 回出るたびに, 奇数回目, 偶数回目に投げる人が入れ替わる. ……(*)

(I) A が勝利したときに B が 0 点の場合

A が最初の表を出すのは奇数回目で, 2 度目の表を出すのは, (*)より, 偶数回目である. そこで, $n=2m$ とおくと, 最初の表を出すのは 1, 3, ……, $(2m-1)$ 回目の m 通りであるから,

$$p(2m) = m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \frac{m}{2^{2m}}$$

(II) A が勝利したときに B が 1 点の場合

A, B が 1 度ずつ表を出した後, A が 2 度目の表を出すのは, (*)より, 奇数回目である. そこで, $n=2m+1$ とおくと, $2m$ 回目までの 2 度の表の出方には次の 2 通りがある.

$$\begin{cases} \text{奇数回目に A が表を出し, その後の奇数回目に B が表を出す} \\ \text{偶数回目に B が表を出し, その後の偶数回目に A が表を出す} \end{cases}$$

$2m$ 回目までの奇数回目, 偶数回目はそれぞれ m 回ずつあるので, これら 2 つの起こり方はいずれも ${}_mC_2$ 通りあるから,

$$p(2m+1) = 2 \cdot {}_mC_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1} = \frac{m(m-1)}{2^{2m+1}}$$

この式は, $m=0, 1$ つまり $n=1, 3$ のときにも成り立つ.

(I), (II)より,

$$p(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^{n+1}} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$