

第1問

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = A$ とおいて, $P_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ と書くことにすると,

$$P_6 = AP_5 = A^2P_4 = \cdots = A^6P_0$$

ここで $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ とし,

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

となる θ をとると,

$$A = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

よって

$$A^6 = r^6 \begin{pmatrix} \cos 6\theta & -\sin 6\theta \\ \sin 6\theta & \cos 6\theta \end{pmatrix}$$

$$P_6 = A^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r^6 \begin{pmatrix} \cos 6\theta \\ \sin 6\theta \end{pmatrix}$$

$P_6 = P_0$ より

$$\begin{cases} r^6 \cos 6\theta = 1 \\ r^6 \sin 6\theta = 0 \end{cases} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(r^6 \cos 6\theta)^2 + (r^6 \sin 6\theta)^2 = 1^2 + 0^2$$

$$r^{12} (\cos^2 6\theta + \sin^2 6\theta) = 1$$

$$r^{12} = 1$$

$r \geq 0$ より, $r = 1$

したがって, $\textcircled{1}$ より

$$\begin{cases} \cos 6\theta = 1 \\ \sin 6\theta = 0 \end{cases}$$

より, $6\theta = 2n\pi$

$$\theta = \frac{n\pi}{3} \quad (n \text{ は整数}) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より, $0 \leq n < 6$

$$0 \leq n \leq 5$$

このうち $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ が相異なるのは

$$n = 1, 5$$

よって, 求める a, b は

$n = 1$ のとき

$$a = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad b = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$n = 5$ のとき

$$a = \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad b = \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上より

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

第2問

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点を調べる.

$$f(x)=g(x) \quad (x>0)$$

$$\frac{\cos x}{x}=\sin x+ax$$

$$a=\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}$$

ここで、 $h(x)=\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x} \quad (x>0)$ とする.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-(\sin x)x^2-(\cos x)2x}{x^4}-\frac{(\cos x)x-\sin x}{x^2} \\ &= -\frac{2\cos x+x^2\cos x}{x^3} \\ &= -\frac{(2+x^2)\cos x}{x^3} \end{aligned}$$

$x>0$ において、 $x^2+2>0$ 、 $x^3>0$ であるから、

$h'(x)=0$ を満たす x は、

$$x=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi \quad (n \text{ は自然数})$$

であり、

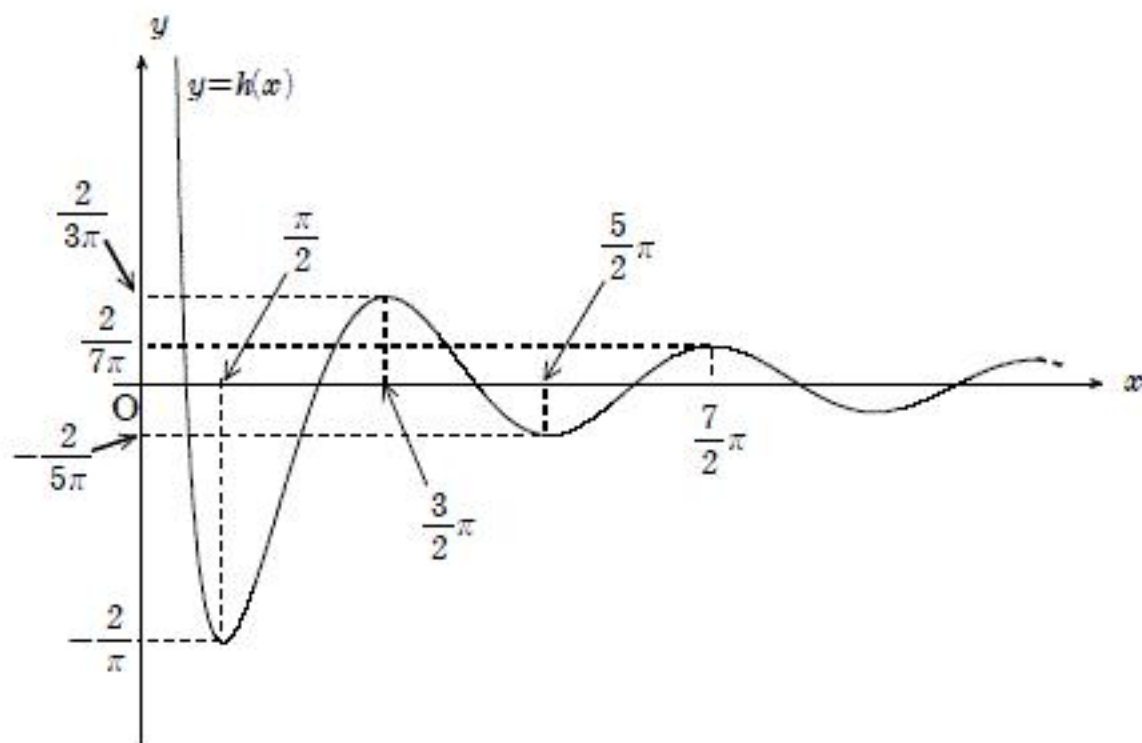
$$h\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)=-\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}=(-1)^n\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}$$

これより、 $\left|h\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right|$ は n に関して減少する.

$h(x)$ の増減表は次の通り.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$\frac{5}{2}\pi$	...	$\frac{7}{2}\pi$	...
$h'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	
$h(x)$	∞	$\searrow$	$-\frac{2}{\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\pi}$	$\searrow$	$-\frac{2}{5\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{7\pi}$	

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)=\infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)=0$ に注意する.



$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が共有点をちょうど3つ持つのは、 $y=h(x)$ と $y=a$ が共有点をちょうど3つ持つときである. よって、グラフより

$$\frac{2}{7\pi}<a<\frac{2}{3\pi}, \quad a=-\frac{2}{5\pi}$$

第3問

(1) (i), (ii)より, 表が出るまでは奇数回目, 偶数回目にはそれぞれ A, B が投げ, 表が 1 回出るたびに, 奇数回目, 偶数回目に投げる人が入れ替わる. ……(*)

(I) A が勝利したときに B が 0 点の場合

A が最初の表を出すのは奇数回目で, 2 度目の表を出すのは, (*)より, 偶数回目である. そこで, $n=2k$ とおくと, 最初の表を出すのは 1, 3, …… , $(2k-1)$ 回目の k 通りであるから,

$$p(2k) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{k}{2^{2k}}$$

(II) A が勝利したときに B が 1 点の場合

A, B が 1 度ずつ表を出した後, A が 2 度目の表を出すのは, (*)より, 奇数回目である. そこで, $n=2k+1$ とおくと, $2k$ 回目までの 2 度の表の出方には次の 2 通りがある.

$$\begin{cases} \text{奇数回目に A が表を出し, その後の奇数回目に B が表を出す} \\ \text{偶数回目に B が表を出し, その後の偶数回目に A が表を出す} \end{cases}$$

$2k$ 回目までの奇数回目, 偶数回目はそれぞれ k 回ずつあるので, これら 2 つの起こり方はいずれも ${}_kC_2$ 通りあるから,

$$p(2k+1) = 2 \cdot {}_kC_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \frac{k(k-1)}{2^{2k+1}}$$

この式は, $k=0, 1$ つまり $n=1, 3$ のときにも成り立つ.

(I), (II)より,

$$p(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^{n+1}} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(2) $n=2m+1$ のとき, $p(1)=0$ に注意すると

$$\begin{aligned} S_n &= S_{2m+1} = \sum_{k=1}^{2m+1} p(k) \\ &= \sum_{k=1}^m \{p(2k) + p(2k+1)\} \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{k}{2^{2k}} + \frac{k(k-1)}{2^{2k+1}} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{k(k+1)}{2^{2k+1}} \end{aligned}$$

$$S_{2m+1} = \frac{1}{2^3} \left\{ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + m(m+1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \right\} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

① $\times \frac{1}{4}$ より,

$$\frac{1}{4} S_{2m+1} = \frac{1}{2^3} \left\{ 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + (m-1)m \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} + m(m+1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^m \right\}$$

…… ②

① - ② より,

$$\frac{3}{4} S_{2m+1} = \frac{1}{2^3} \left\{ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + 2m \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \right\} - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{m(m+1)}{4^m}$$

$$S_{2m+1} = \frac{1}{3} \left\{ 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + m \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \right\} - \frac{1}{6} \cdot \frac{m(m+1)}{4^m} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

そこで, ③において,

$$T = 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + m \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

とおくと, ④ $\times \frac{1}{4}$ より,

$$\frac{1}{4} T = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + (m-1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} + m \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^m \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

④ - ⑤ より,

$$\frac{3}{4} T = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} - m \left(\frac{1}{4}\right)^m$$

$$T = \frac{16}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m \right\} - \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

③, ⑥ より,

$$\begin{aligned} S_{2m+1} &= \frac{1}{3} T - \frac{1}{6} \cdot \frac{m(m+1)}{4^m} \\ &= \frac{16}{27} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m \right\} - \frac{m}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{m(m+1)}{4^m} \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

次に, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{4^{m-1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(m+1)}{4^m} = 0$ …… (☆) を示す.

$m \geq 3$ のとき, $4^m > 2^m = (1+1)^m > {}_mC_3$ であるから,

$$0 < \frac{m}{4^{m-1}} < \frac{4m}{\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)} = \frac{24}{(m-1)(m-2)} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

同様にして,

$$0 < \frac{m(m+1)}{4^m} < \frac{m(m+1)}{\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)} = \frac{6(m+1)}{(m-1)(m-2)} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

はさみうちの原理より, (☆) は成立する.

これより, ⑦において, $m \rightarrow \infty$ のとき各項は収束し,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \frac{16}{27} \cdot 1 - 0 - 0 = \frac{16}{27}$$

次に $n=2m+2$ のとき,

$$p(2m+2) = \frac{m+1}{2^{2m+2}} = \frac{m+1}{4^{m+1}} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

より,

$$S_n = S_{2m+2} = S_{2m+1} + p(2m+2) \rightarrow \frac{16}{27} \quad (m \rightarrow \infty)$$

以上より, n の偶奇によらず, $\sum_{k=1}^n p(k)$ は $n \rightarrow \infty$ で $\frac{16}{27}$ に収束するので,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(n) = \frac{16}{27}$$

第4問

$$(1) \quad \frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} = \overrightarrow{a}, \quad \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} = \overrightarrow{b}, \quad \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = \overrightarrow{c} \text{ とおくと,}$$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0, \quad |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 1$$

これより,

$$|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{c}|^2$$

$$\therefore \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -\frac{1}{2}$$

すなわち,

$$\frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} = -\frac{1}{2}$$

これより, $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ のなす角 $\angle APB$ は,

$$\angle APB = 120^\circ$$

同様に, $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}|^2 = |\overrightarrow{b}|^2$ より,

$$\angle APC = 120^\circ$$

(2) $\angle PAB = \theta$ とおくと, $\triangle APB$, $\triangle APC$ において, 正弦定理より,

$$\frac{PB}{\sin \theta} = \frac{AB}{\sin 120^\circ} \quad \therefore PB = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta$$

$$\frac{PC}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{AC}{\sin 120^\circ} \quad \therefore PC = 2 \sin(90^\circ - \theta) = 2 \cos \theta$$

$\triangle PBC$ において, 余弦定理より,

$$PB^2 + PC^2 - 2PB \cdot PC \cos 120^\circ = BC^2$$

$$\frac{4}{3} \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta - 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta \cdot 2 \cos \theta \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2^2$$

$$\frac{4}{3} \sin^2 \theta + 4(1 - \sin^2 \theta) + \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \theta \cos \theta = 4$$

$$-\frac{8}{3} \sin^2 \theta + \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \theta \cos \theta = 0$$

P は $\triangle ABC$ の内部にあるから, $\sin \theta \neq 0$. よって

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta$$

したがって, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入して

$$\left(1 + \frac{4}{3}\right) \sin^2 \theta = 1$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$\triangle APB$ において, $\frac{AP}{\sin(60^\circ - \theta)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ より,

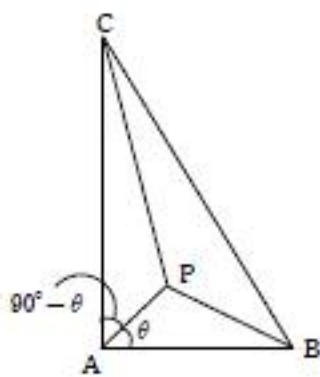
$$AP = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}} \right) = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$PB = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$PC = 2 \cos \theta = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

まとめて,

$$|\overrightarrow{PA}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, \quad |\overrightarrow{PB}| = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad |\overrightarrow{PC}| = \frac{4}{\sqrt{7}}$$



第5問

$$(1) \quad x^3 + 3yx^2 < (x+y-1)(x+y)(x+y+1) < x^3 + (3y+1)x^2$$

$$\iff x^3 + 3yx^2 < (x+y)^3 - (x+y) < x^3 + (3y+1)x^2$$

$$\iff 0 < 3y^2x + y^3 - x - y < x^2$$

ここで、 x は正の実数、 y は自然数であるから

$$\begin{aligned} & 3y^2x + y^3 - x - y \\ &= (3y^2 - 1)x + y(y^2 - 1) > 0 \end{aligned}$$

これより、不等式の左半分はつねに成り立つ。また、右半分より

$$x^2 - (3y^2 - 1)x - (y^3 - y) > 0$$

判別式 $D = (3y^2 - 1)^2 + 4(y^3 - y) > 0$ より、

$$x^2 - (3y^2 - 1)x - (y^3 - y) = 0$$

は2実数解をもつ。2解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3y^2 - 1 > 0 \\ \alpha\beta = -(y^3 - y) \leq 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \beta > 0 \end{cases}$$

以上より、正の実数 x の範囲は、

$$x > \frac{3y^2 - 1 + \sqrt{9y^4 + 4y^3 - 6y^2 - 4y + 1}}{2}$$

$$(2) \quad y = \frac{\overbrace{111111 \dots 1}^{102 \text{ 個}}}{3} \text{ とすると、} y = 37037037 \dots 37 \text{ となり、} y \text{ は自然数である。}$$

$10^{101} > y$ より、 $x = 10^{300}$ とすれば、

$$\begin{aligned} & 3y^2x + y^3 - x - y < y^2(3x + y) \\ & < (10^{101})^2(3 \cdot 10^{300} + 10^{101}) < 10^{202} \cdot 10^{301} < (10^{300})^3 = x^3 \end{aligned}$$

より、(1)の条件は満たされる。

また、このとき、

$$\begin{aligned} x^3 + 3xy^2 &= x^2(x + 3y) \\ &= 1000 \dots 00111 \dots 11 \times 10^{600} \\ x^3 + (3y+1)x^2 &= x^2(x + 3y + 1) \\ &= 1000 \dots 00111 \dots 12 \times 10^{600} \end{aligned}$$

よって、 $x = 10^{300}$ 、 $y = \frac{\overbrace{111 \dots 1}^{102 \text{ 個}}}{3}$ とし、連続する自然数の積として

$$A = (x+y-1)(x+y)(x+y+1)$$

をとると、

$$\underbrace{1000 \dots 00}_{199 \text{ 個}} \underbrace{111 \dots 11}_{102 \text{ 個}} \underbrace{00 \dots 00}_{600 \text{ 個}} < A < \underbrace{1000 \dots 00}_{199 \text{ 個}} \underbrace{111 \dots 12}_{102 \text{ 個}} \underbrace{00 \dots 00}_{600 \text{ 個}}$$

以上より、 A の601桁目から702桁目までの102個が全て1となるので、 A は条件(a)、(b)を満たす自然数である。

第6問

(1) O を原点とし、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OA}$ をそれぞれ u 軸、 v 軸の正方向とする座標系を考えると、平面上の点 P の

xy 座標 (x, y) と uv 座標 (u, v) の間には次の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ v &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{aligned} \quad \cdots \cdots ①$$

また、立体 V_1 を平面 $u = k$ ($-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}$) で切断すると、断面は半径 $\sqrt{2} - |k|$ の円となるから、

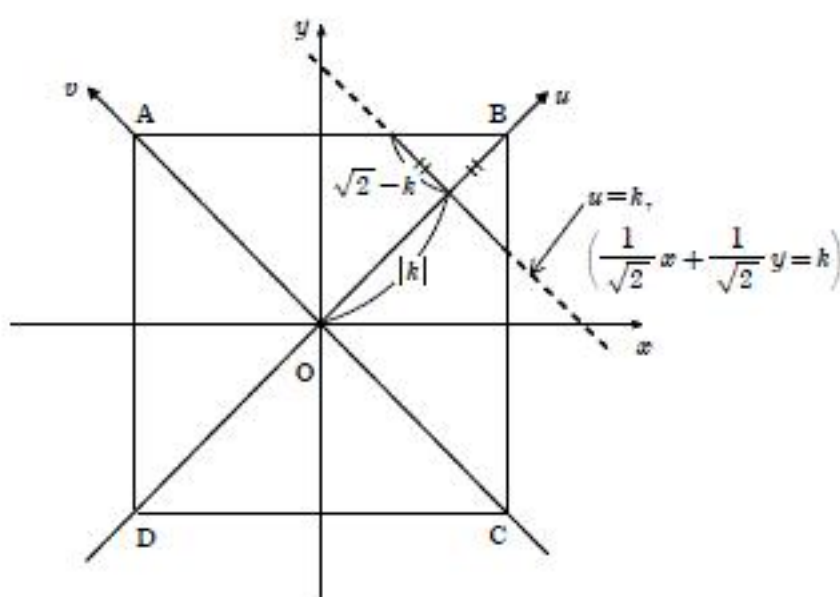
$$v^2 + z^2 \leq (\sqrt{2} - |k|)^2 \quad \cdots \cdots ②$$

①より、 $u = k$ は、 $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = k$ に対応するから、②を x, y の式になおすと、

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 + z^2 \leq \left(\sqrt{2} - \left|\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right|\right)^2$$

$$\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + z^2 \leq 2 - 2\sqrt{2}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right| + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$$

$$z^2 \leq 2xy - 2|y + x| + 2$$



これが V_1 を表す不等式であるから、平面 $x = t$ による V_1 の切り口は、 $x = t$ を代入して、

$$z^2 \leq 2ty - 2|y + t| + 2$$

したがって、 $y + t \geq 0$ のとき、 $z^2 \leq 2ty - 2y - 2t + 2$

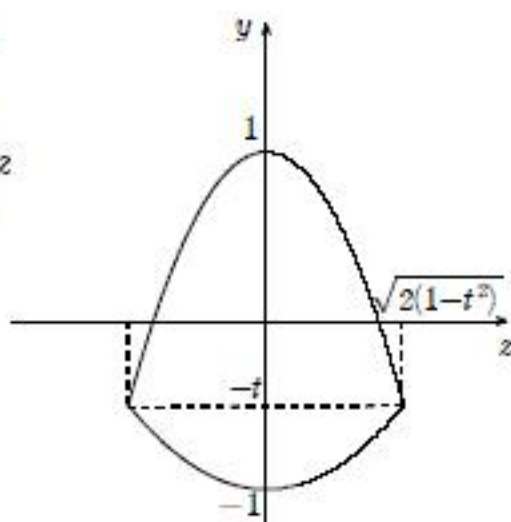
$$y \leq \frac{z^2}{2(t-1)} + 1 \quad \cdots \cdots ③ \quad (2(t-1) < 0 \text{ より})$$

$y + t < 0$ のとき、 $z^2 \leq 2ty + 2y + 2t + 2$

$$y \geq \frac{z^2}{2(t+1)} - 1 \quad \cdots \cdots ④ \quad (2(t+1) > 0 \text{ より})$$

よって、断面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\sqrt{2(1-t^2)}}^{\sqrt{2(1-t^2)}} \left(\frac{z^2}{2(t-1)} + 1 - \frac{z^2}{2(t+1)} + 1 \right) dz \\ &= \int_{-\sqrt{2(1-t^2)}}^{\sqrt{2(1-t^2)}} \left\{ \left(\frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} \right) z^2 + 2 \right\} dz \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} \right) (2\sqrt{2(1-t^2)})^3 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-t^2} \cdot 16\sqrt{2}(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8}{3}\sqrt{2}\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$



(2) V_1 と V_2 は xz 平面に関して対称であるから、 V_1 を表す不等式③、④において

y を $-y$ でおきかえると V_2 を表す不等式となる。すなわち、

$$\begin{cases} -y \leq \frac{z^2}{2(t-1)} + 1 \\ -y \geq \frac{z^2}{2(t+1)} - 1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} y \geq -\frac{z^2}{2(t-1)} - 1 \\ y \leq -\frac{z^2}{2(t+1)} + 1 \end{cases}$$

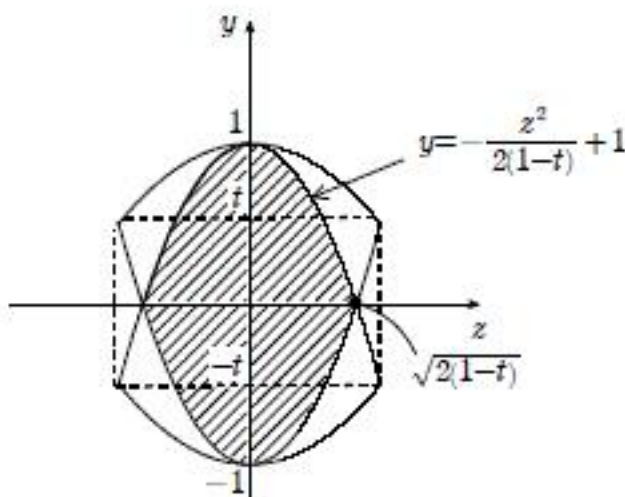
よって、 V_1 と V_2 の共通部分の断面は ($0 \leq t < 1$ のとき)

$$\frac{z^2}{2(1-t)} - 1 \leq y \leq -\frac{z^2}{2(1-t)} + 1$$

と表される。

よって、右図の斜線部分の面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \int_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1-t)}} \left(-\frac{z^2}{2(1-t)} + 1 \right) dz \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2(1-t)} \right) (2\sqrt{2(1-t)})^3 \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t} \end{aligned}$$



よって、求める体積は

$$2 \int_0^1 \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t} dt = \frac{16\sqrt{2}}{3} \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$