

第1問

$$(1) \quad f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

$$= -2\{x - (2t - 3)\}^2 + t^3 - 9t^2 + 15t \leq t^3 - 9t^2 + 15t$$

等号は $x = 2t - 3$ のときに成立する.

よって, 関数 $f(x)$ の最大値は $t^3 - 9t^2 + 15t$ である.

$$(2) \quad g(t) = t^3 - 9t^2 + 15t \text{ である.}$$

$$g'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t-1)(t-5) \text{ より,}$$

$t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲における $g(t)$ の増減表は次の通り,

t	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		5	
$g'(t)$		+	0	-	0	+
$g(t)$	$\frac{-(31\sqrt{2}+18)}{4}$	↗	7	↘	-25	↗

ここで, $\sqrt{2} < 2$ より,

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-(31\sqrt{2}+18)}{4} > \frac{-(31 \cdot 2 + 18)}{4} = -20 > -25 = g(5)$$

よって, $g(t)$ の最小値は -25 である.

第2問

(1) $n=1$ のとき、 $a+3$ 個の球のうち、赤球 1 個を取り出す確率で、 $p_1 = \frac{1}{a+3}$

$n=2$ のとき、
 ・ 1 回目に赤球を出すとき、U の中身に赤球が存在しないので、
 2 回目に赤球が取り出されることはない、

・ 1 回目に白球を出すとき $\left(\text{その確率は} \frac{a+2}{a+3} \right)$,

2 回目に赤球が取り出される確率は、 $a+1$ 個の球から赤球 1 個を取り出す確率で、 $\frac{1}{a+1}$

$$\text{以上より、} p_2 = \frac{a+2}{a+3} \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{(a+3)(a+1)}$$

(2) $n \geq 2$ で考える、

n 回目に取り出された球が白球である確率は $1-p_n$ である、

$n+1$ 回目に赤球が取り出される確率 p_{n+1} について考える、

(i) n 回目に赤球が取り出されるとき

U の中身に赤球が存在しないので、 $n+1$ 回目に赤球が取り出されることはない、

(ii) n 回目に白球が取り出されるとき (その確率は $1-p_n$)

$n+1$ 回目に赤球が取り出される確率は $\frac{1}{a+1}$

$$(i), (ii) \text{ より、} p_{n+1} = \frac{1}{a+1} (1-p_n)$$

よって、

$$p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1} \left(p_n - \frac{1}{a+2} \right)$$

$\left\{ p_n - \frac{1}{a+2} \right\} \quad (n=2, 3, \dots)$ は初項 $p_2 - \frac{1}{a+2}$ 、公比 $-\frac{1}{a+1}$ の等比数列である、

$$\therefore p_n - \frac{1}{a+2} = \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-2} \left(p_2 - \frac{1}{a+2} \right)$$

ここで、

$$p_2 - \frac{1}{a+2} = \frac{a+2}{(a+3)(a+1)} - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{(a+3)(a+2)(a+1)}$$

であるから

$$p_n = \frac{1}{a+2} \left\{ 1 - \frac{1}{a+3} \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1} \right\} \quad (n \geq 2)$$

第3問

(1) $P(p, \sqrt{3}p)$ ($0 \leq p \leq 2$), $Q(q, -\sqrt{3}q)$ ($-3 \leq q \leq 0$) とおくと、

$$OP = 2p, OQ = -2q$$

よって、 $OP + OQ = 6$ より

$$p - q = 3 \quad \therefore q = p - 3$$

これより、 p, q の動く範囲は

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq 2 \\ -3 \leq q \leq 0 \\ q = p - 3 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 0 \leq p \leq 2 \\ q = p - 3 \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

直線 PQ の方程式は

$$y = \frac{\sqrt{3}p - (-\sqrt{3}q)}{p - q}(x - p) + \sqrt{3}p$$

$$\therefore \sqrt{3}y = (2p - 3)x - 2p^2 + 6p$$

①のもとでのこの直線の通過範囲を D' とする。

$-3 \leq s \leq 2$ のとき、

点 (s, t) が D' に属する

$$\iff \sqrt{3}t = (2p - 3)s - 2p^2 + 6p \quad \cdots$$

①の範囲に存在する。……(☆)

②は

$$2p^2 - 2(s + 3)p + \sqrt{3}t + 3s = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}'$$

となる。②'の左辺を $f(p)$ とおき、 $f(p)$ のグラフの対称軸: $p = \frac{s + 3}{2}$ に注目すると、

$-3 \leq s \leq 2$ より、 $0 \leq \frac{s + 3}{2} \leq \frac{5}{2}$ である。以下、対称軸が①の範囲に含まれるか否かで場合分けして、(☆)の

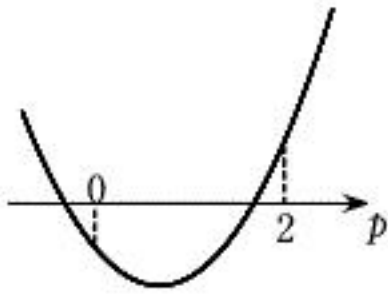
条件を調べる。

(i) $0 \leq \frac{s + 3}{2} \leq 2$ つまり、 $-3 \leq s \leq 1$ のとき

$$(\textcircled{2}' \text{ の判別式}) / 4 = s^2 + 9 - 2\sqrt{3}t \geq 0$$

$$\text{かつ} \begin{cases} f(0) = \sqrt{3}t + 3s \geq 0 \\ \text{または} \\ f(2) = \sqrt{3}t - s - 4 \geq 0 \end{cases}$$

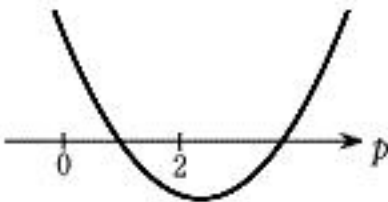
$$\therefore \begin{cases} t \leq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ t \geq -\sqrt{3}s \text{ または } t \geq \frac{\sqrt{3}}{3}s + \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$



(ii) $2 < \frac{s + 3}{2} \leq \frac{5}{2}$ つまり、 $1 < s \leq 2$ のとき

$$f(0) = \sqrt{3}t + 3s \geq 0 \quad \text{かつ} \quad f(2) = \sqrt{3}t - s - 4 \leq 0$$

$$\therefore t \geq -\sqrt{3}s \quad \text{かつ} \quad t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}s + \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$



さらに、直線 PQ 上の点 (s, t) が線分 PQ 上にあるための条件は

$$t \geq \sqrt{3}s \quad \text{かつ} \quad t \geq -\sqrt{3}s \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

であるから、 $-3 \leq s \leq 2$ のとき、点 (s, t) が D に属する条件は、

$$\text{点}(s, t) \text{ は } D' \text{ に属する, かつ, } \textcircled{C}$$

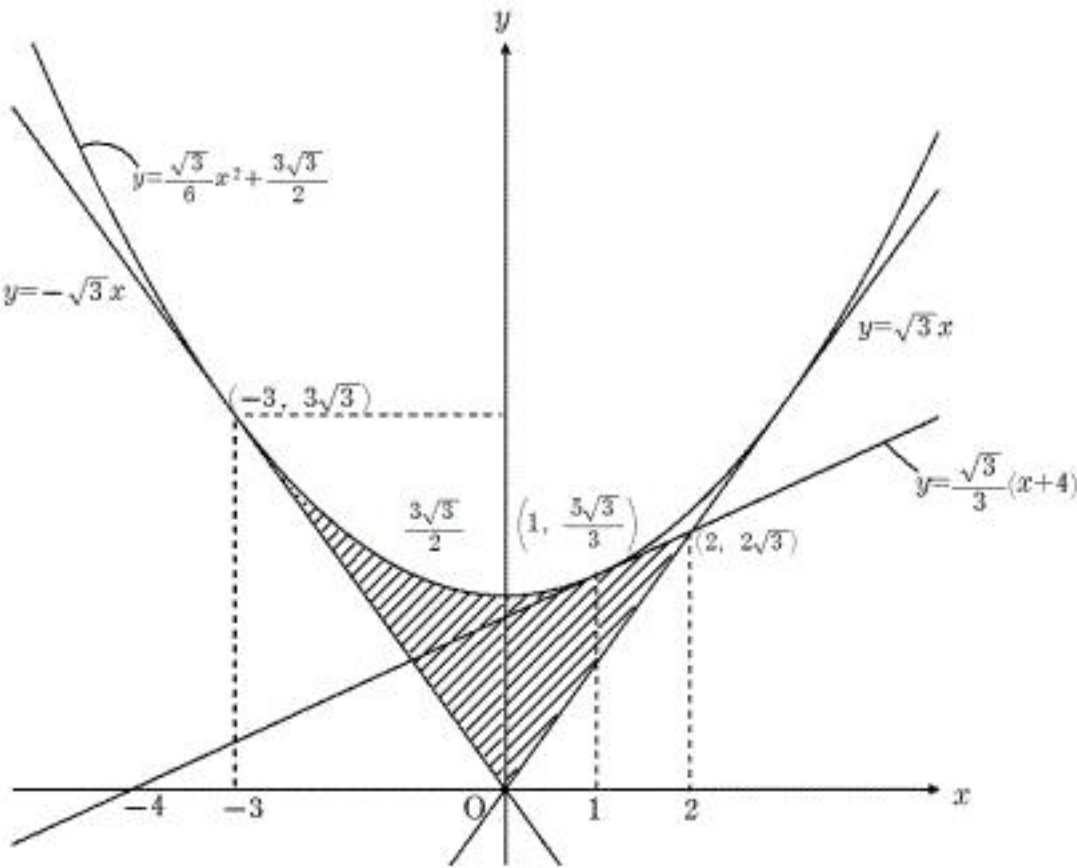
つまり、

$$(\textcircled{A} \text{ または } \textcircled{B}) \text{ かつ } \textcircled{C}$$

であるから、グラフを考えると、

$$\begin{cases} -\sqrt{3}s \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} & (-3 \leq s \leq 0) \\ \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} & (0 \leq s \leq 1) \\ \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(s + 4) & (1 \leq s \leq 2) \end{cases}$$

(2) D は(1)の結果で、 $s \rightarrow x$, $t \rightarrow y$ と置き換えた領域であるから、下図の斜線部となる。ただし、境界は全て含む。



第4問

(1) 自然数 n に対し、 a_n を p で割った商を c_n とすると、

$$\begin{cases} a_{n+2} = pc_{n+2} + b_{n+2} \\ a_{n+1} = pc_{n+1} + b_{n+1} \\ a_n = pc_n + b_n \end{cases}$$

が成立する。ここで、

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1}(a_n + 1) \\ &= (pc_{n+1} + b_{n+1})(pc_n + b_n + 1) \\ &= p \cdot (\text{整数}) + b_{n+1}(b_n + 1) \end{aligned}$$

であるから、 a_{n+2} を p で割った余り b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致する。

b_n の定義より、 b_{n+2} を p で割った余りは b_{n+2} であるから題意は示された。■

(2) (1)を用いて実際に計算すると、

$b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 9, b_4 = 2, b_5 = 3, \dots$ より、帰納的に

$$b_n = \begin{cases} 2 & (n=1, 4, 7, 10) \\ 3 & (n=2, 5, 8) \\ 9 & (n=3, 6, 9) \end{cases}$$

が成立する。

(3) (1)より、自然数 n に対し b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致するので、整数 d_n, d_m を用いて

$$\begin{aligned} b_{n+1}(b_n + 1) &= pd_n + b_{n+2} \\ b_{m+1}(b_m + 1) &= pd_m + b_{m+2} \end{aligned}$$

と表される。 $b_{m+2} = b_{n+2}, b_{m+1} = b_{n+1}$ より、2式の差をとると、

$$b_{n+1}(b_m - b_n) = p(d_m - d_n)$$

が成立する。ここで、右辺は素数 p の倍数であり、

$$0 < b_{n+1} < p, \quad -p < b_m - b_n < p$$

であるから、

$$\begin{aligned} b_m - b_n &= 0 \\ \therefore b_m &= b_n \end{aligned}$$

が成立する。■