

第1問

- (1) O を原点, D を z 軸上の正の方向にとり,
 $A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0)$ となるように座標軸をとると,
 $P(1, 0, \tan \alpha), R(0, 1, \tan \beta)$ である.

平面 $OCGD //$ 平面 $ABFE$ であるから,

$$OR // PQ$$

同様に, $OP // RQ$ であるから, 四角形 $OPQR$ は平行四辺形である.

よって,

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{|\overline{OP}|^2 |\overline{OR}|^2 - (\overline{OP} \cdot \overline{OR})^2} \\ &= \sqrt{(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \tan^2 \beta) - (\tan \alpha \tan \beta)^2} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta}}} \end{aligned}$$

- (2) $S = \frac{7}{6}$ より, (1)の結果を用いて,

$$\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta = \frac{13}{36} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ここで $\tan \alpha + \tan \beta = s, \tan \alpha \tan \beta = t$ とおくと, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ であるので,

$$s > 0, t > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①は

$$s^2 - 2t = \frac{13}{36} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

と書き換えられる. また, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ より

$$\begin{aligned} 1 &= \tan(\alpha + \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{s}{1 - t} \end{aligned}$$

$$\therefore s = 1 - t \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

④を③に代入し, t を消去して

$$\begin{aligned} s^2 - 2(1 - s) &= \frac{13}{36} \\ 36s^2 + 72s - 85 &= 0 \\ (6s + 17)(6s - 5) &= 0 \end{aligned}$$

②より,

$$s = \frac{5}{6} \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

すなわち, $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{5}{6}$

さらに, ⑤に④を代入すれば,

$$t = \frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より, $\tan \alpha, \tan \beta$ は,

$$\begin{aligned} X^2 - \frac{5}{6}X + \frac{1}{6} &= 0 \\ \therefore (3X - 1)(2X - 1) &= 0 \end{aligned}$$

の2解 $X = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ と一致する.

$0 < \alpha \leq \beta < \frac{\pi}{2}$ より, $\tan \alpha \leq \tan \beta$ であるから,

$$\underline{\underline{\tan \alpha = \frac{1}{3}}}$$

第2問

- (1) $n=1$ のとき, $a+3$ 個の球のうち, 赤球 1 個を取り出す確率で, $p_1 = \frac{1}{a+3}$
- $n=2$ のとき, $\cdot$ 1 回目に赤球を出すとき, U の中身に赤球が存在しないので, 2 回目に赤球が取り出されることはない.
- $\cdot$ 1 回目に白球を出すとき, $\left(\text{その確率は} \frac{a+2}{a+3} \right)$
- 2 回目に赤球が取り出される確率は, $a+1$ 個の球から赤球 1 個を取り出す確率で, $\frac{1}{a+1}$

以上より,
$$p_2 = \frac{a+2}{a+3} \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{(a+3)(a+1)}$$

- (2) $n \geq 2$ で考える.
- n 回目に取り出された球が白球である確率は $1-p_n$.
- $n+1$ 回目に赤球が取り出される確率 p_{n+1} について考える.

- (i) n 回目に赤球が取り出されるとき
- U の中身に赤球が存在しないので, $n+1$ 回目に赤球が取り出されることはない.
- (ii) n 回目に白球が取り出されるとき (その確率は $1-p_n$)

$$n+1 \text{ 回目に赤球が取り出される確率は } \frac{1}{a+1}$$

(i), (ii) より,
$$p_{n+1} = \frac{1}{a+1}(1-p_n)$$

よって,

$$p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1} \left(p_n - \frac{1}{a+2} \right)$$

$$\left\{ p_n - \frac{1}{a+2} \right\} \quad (n=2, 3, \dots) \text{ は初項 } p_2 - \frac{1}{a+2}, \text{ 公比 } -\frac{1}{a+1} \text{ の等比数列である.}$$

$$\therefore p_n - \frac{1}{a+2} = \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-2} \left(p_2 - \frac{1}{a+2} \right)$$

ここで,

$$p_2 - \frac{1}{a+2} = \frac{a+2}{(a+3)(a+1)} - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{(a+3)(a+2)(a+1)}$$

であるから

$$p_n = \frac{1}{a+2} \left\{ 1 - \frac{1}{a+3} \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1} \right\} \quad (n \geq 2)$$

- (3) $m \geq 2$ で考えてよい.

$$\sum_{n=1}^m p_n = p_1 + \sum_{n=2}^m p_n$$

$$= \frac{1}{a+3} + \sum_{n=2}^m \frac{1}{a+2} \left\{ 1 - \frac{1}{a+3} \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+2} (m-1) + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{m-1}}{1 + \frac{1}{a+1}}$$

$$= \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+2} (m-1) + \frac{1}{(a+2)^2 (a+3)} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{m-1} \right\}$$

$$\therefore \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m p_n = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(a+2)^2 (a+3)} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{m-1} \right\}$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{a+2} \quad \left(\because \left| -\frac{1}{a+1} \right| < 1 \right)$$

第3問

(1) C_1, C_2 が共有点をもつのは, C_1, C_2 の方程式から y を消去して得られる

$$\begin{aligned} -x^2 + 1 &= (x-u)^2 + u \\ \therefore 2x^2 - 2ux + u^2 + u - 1 &= 0 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

が実数解をもつとき, つまり,

$$\begin{aligned} (\text{判別式})/4 &= u^2 - 2(u^2 + u - 1) \\ &= -u^2 - 2u + 2 \geq 0 \\ \therefore -1 - \sqrt{3} &\leq u \leq -1 + \sqrt{3} \quad \text{のときである.} \end{aligned}$$

よって,

$$\underline{\begin{cases} a = -1 - \sqrt{3} \\ b = -1 + \sqrt{3} \end{cases}}$$

(2) x_1, x_2 は①の2解であるから,

$$x_1 + x_2 = u, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{2}(u^2 + u - 1) \quad \dots\dots ②$$

$y_i = -x_i^2 + 1$ ($i=1, 2$) であるから,

$$\begin{aligned} x_1 y_2 - x_2 y_1 &= x_1(-x_2^2 + 1) - x_2(-x_1^2 + 1) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 x_2 + 1) \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

ここで, ②より,

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \\ &= u^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(u^2 + u - 1) \\ &= -u^2 - 2u + 2 \end{aligned}$$

したがって, ③より,

$$\begin{aligned} 2|x_1 y_2 - x_2 y_1| &= 2\sqrt{-u^2 - 2u + 2} \left\{ \frac{1}{2}(u^2 + u - 1) + 1 \right\} \\ &= \underline{(u^2 + u + 1)\sqrt{-u^2 - 2u + 2}} \end{aligned}$$

(3) $f(u) = (u^2 + u + 1)\sqrt{-u^2 - 2u + 2}$

$t = u + 1$ とおくと,

$$f(u) = (t^2 - t + 1)\sqrt{3 - t^2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(u) du \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^2 - t + 1)\sqrt{3 - t^2} dt \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} (t^2 + 1)\sqrt{3 - t^2} dt \end{aligned}$$

$t = \sqrt{3} \sin \theta$ と置き換えすると

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\theta} &= \sqrt{3} \cos \theta & \begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow \sqrt{3} \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \\ I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin^2 \theta + 1) \cdot 3 \cos^2 \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4\theta}{2} + 3 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= 2 \left[\frac{9}{8} \left(\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) + \frac{3}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \underline{\frac{21}{8} \pi} \end{aligned}$$

第4問

(1) $0 < p < 1, q > 0$ …① であるから

$0 < x < 1$ のとき

$$0 < (1-p)x < x \quad \cdots \textcircled{2}$$

また, $0 < e^{-qx} < 1$ より, $0 < 1 - e^{-qx} < 1$ であるから

$$0 < (1-x)(1 - e^{-qx}) < 1 - x \quad \cdots \textcircled{3}$$

②, ③の辺々を加えると

$$0 < (1-p)x + (1-x)(1 - e^{-qx}) < 1$$

$$\therefore 0 < f(x) < 1 \quad \blacksquare$$

(2) (1)で示したことより, $0 < x_0 < 1$ のとき

$$0 < x_1 = f(x_0) < 1$$

同様に, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$0 < x_n < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

不等式 $1 + x \leq e^x$ において, x の代わりに $-qx$ とおくと, 任意の実数 x に対して

$$1 - qx \leq e^{-qx}$$

$$\therefore 1 - e^{-qx} \leq qx \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

が成り立つ.

$0 < x < 1$ のとき, ⑤より

$$(1-x)(1 - e^{-qx}) \leq qx(1-x)$$

であるから,

$$f(x) = (1-p)x + (1-x)(1 - e^{-qx})$$

$$\leq (1-p)x + qx(1-x)$$

$$= x\{1-p+q(1-x)\}$$

$$< x(1-p+q)$$

したがって, ④より

$$f(x_n) < (1-p+q)x_n$$

$$\therefore x_{n+1} < (1-p+q)x_n$$

$$\therefore 0 < x_n < (1-p+q)^n x_0 \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$0 < p < 1, p > q$ より

$$0 < 1-p+q = 1-(p-q) < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-p+q)^n = 0$$

したがって, ⑥において, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \blacksquare$$

(3) $g(x) = x - f(x)$ とおく.

$$g(0) = -f(0) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$g(1) = 1 - f(1) = 1 - (1-p) = p > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

また,

$$g'(x) = 1 - f'(x)$$

$$= 1 - (1-p) + (1 - e^{-qx}) - qe^{-qx}(1-x)$$

$$= p + (1 - e^{-qx}) - qe^{-qx}(1-x)$$

より,

$$g'(0) = p - q < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

⑦, ⑧より, $x > 0$ で, x が十分小さいとき, $g(x) < 0$ であり,

⑧より, $g(1) = p > 0$

よって,

$$g(c) = 0 \quad 0 < c < 1$$

すなわち,

$$c = f(c) \quad 0 < c < 1$$

となる実数 c が存在する. $\blacksquare$

第5問

- (1) 自然数 n に対し, a_n を p で割った商を c_n とすると,

$$\begin{cases} a_{n+2} = pc_{n+2} + b_{n+2} \\ a_{n+1} = pc_{n+1} + b_{n+1} \\ a_n = pc_n + b_n \end{cases}$$

が成立する. ここで,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1}(a_n + 1) \\ &= (pc_{n+1} + b_{n+1})(pc_n + b_n + 1) \\ &= p \cdot (\text{整数}) + b_{n+1}(b_n + 1) \end{aligned}$$

であるから,

$b_{n+2}, a_{n+2}, b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りはすべて一致する.

b_n の定義より, b_{n+2} を p で割った余りは b_{n+2} であるから題意は示された. ■

- (2) (1)を用いて実際に計算すると,

$b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 9, b_4 = 2, b_5 = 3, \dots$ より, 帰納的に

$$b_n = \begin{cases} 2 & (n=1, 4, 7, 10) \\ 3 & (n=2, 5, 8) \\ 9 & (n=3, 6, 9) \end{cases}$$

が成立する.

- (3) (1)より, 自然数 n に対し b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を

p で割った余りと一致するので, 整数 d_n, d_m を用いて

$$\begin{aligned} b_{n+1}(b_n + 1) &= pd_n + b_{n+2} \\ b_{m+1}(b_m + 1) &= pd_m + b_{m+2} \end{aligned}$$

と書ける. $b_{m+2} = b_{n+2}, b_{m+1} = b_{n+1}$ より,

$$b_{n+1}(b_m - b_n) = p(d_m - d_n)$$

が成立する. ここで, 右辺は素数 p の倍数であり,

$$0 < b_{n+1} < p, \quad -p < b_m - b_n < p$$

であるから,

$$\begin{aligned} b_m - b_n &= 0 \\ \therefore b_m &= b_n \end{aligned}$$

が成立する. ■

- (4) $n \geq 2$ なる自然数に対し $0 < b_n < p$ より, (b_{n+1}, b_{n+2}) の組は,

$$(1, 1), (1, 2), \dots, (1, p-1), (2, 1), \dots, (p-1, p-1)$$

の $(p-1)^2$ 通り以下である.

したがって, $1 \leq k < l$, $(b_{k+1}, b_{k+2}) = (b_{l+1}, b_{l+2})$ が成立する自然数 k, l が存在する.

さらに, $n \geq 2$ なる自然数 n に対して $0 < b_n < p$, (3)より

$b_k = b_l$ が成立して, $b_k > 0$ が成立する.

よって帰納的に $b_1 = b_{l-k+1}$ が成立する.

ところで, $l-k > 0$ であるから $l-k+1 \geq 2$

よって $b_{l-k+1} \neq 0$ よって $b_1 \neq 0$

よって a_1 は p で割り切れない. ■

第6問

(1) P の x 座標を p ($0 \leq p \leq 2$), Q の x 座標を q ($-2 \leq q \leq 0$) とおくと,

$$OP = 2p, OQ = -2q$$

$$\text{よって } OP + OQ = 6 \iff p - q = 3 \iff q = p - 3$$

p, q の動く範囲は

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq 2 \\ -2 \leq q \leq 0 \\ q = p - 3 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 1 \leq p \leq 2 \\ q = p - 3 \end{cases}$$

直線 PQ の方程式は

$$y = \frac{\sqrt{3}p - (-\sqrt{3}q)}{p - q}(x - p) + \sqrt{3}p$$

$$\therefore \sqrt{3}y = (2p - 3)x - 2p^2 + 6p$$

この直線の通過範囲を D' とする.

$0 \leq s \leq 2$ のとき,

点 (s, t) が D' に属する

$$\iff \begin{cases} \sqrt{3}t = (2p - 3)s - 2p^2 + 6p \\ 1 \leq p \leq 2 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \text{を満たす } p \text{ が存在する.}$$

①は

$$2p^2 - 2(s + 3)p + \sqrt{3}t + 3s = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

となる. ②の左辺を $f(p)$ とおき, $f(p)$ のグラフの対称軸: $p = \frac{s+3}{2}$ に注目すると,

$$0 \leq s \leq 2 \text{ より, } \frac{3}{2} \leq \frac{s+3}{2} \leq \frac{5}{2}$$

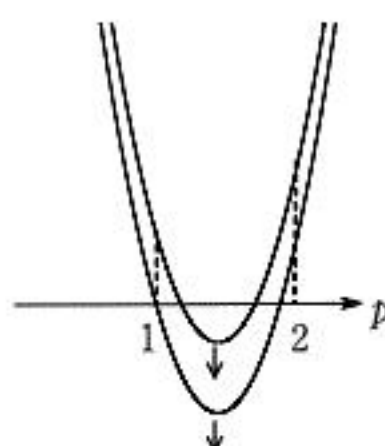
(i) $\frac{3}{2} \leq \frac{s+3}{2} \leq 2$ つまり, $0 \leq s \leq 1$ のとき,

(②の判別式) $/4 = s^2 + 9 - 2\sqrt{3}t \geq 0$ の 下で,

$$\begin{cases} f(1) = \sqrt{3}t + s - 4 \geq 0 \\ \text{または} \\ f(2) = \sqrt{3}t - s - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} t \geq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ t \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}s + \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \text{または} \quad t \geq \frac{\sqrt{3}}{3}s + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

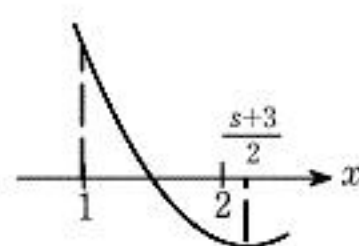
.....④



(ii) $2 < \frac{s+3}{2} \leq \frac{5}{2}$ つまり, $1 < s \leq 2$ のとき,

$$\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} t \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}s + \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}s + \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

.....⑤



点 (s, t) が D に属する条件は,

$$\begin{cases} \text{点}(s, t) \text{ は } D' \text{ に属する} \\ t \geq -\sqrt{3}s \\ t \geq \sqrt{3}s \end{cases}$$

.....⑥または⑦

.....⑧

であるから,

(⑥または⑦)かつ⑧

よって,

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3}(s-4) \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} & (0 \leq s \leq 1) \\ \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(s+4) & (1 < s \leq 2) \end{cases}$$

.....(*)

(2) P, Q の対称性から, D は y 軸について対称な領域である(**)

(1)で求めた s, t の条件(*)において,

$\begin{cases} s \rightarrow x \\ t \rightarrow y \end{cases}$ として, (**)に注意して, xy 平面に図示すれば下図斜線部を得る.

ただし,境界線は全て含む.

