

第1問

命題 A を考える.

$\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$, すなわち, $n^3 - 26n^2 + 2600 \geq 0$ (n : 正の整数) の真偽を調べる.

$f(x) = x^3 - 26x^2 + 2600$ とすると, $f'(x) = 3x^2 - 52x$ より,

$$f'(x) = 0 \iff x = 0, \frac{52}{3}$$

よって, 増減表は右のようになる.

$$17 < \frac{52}{3} < 18 \text{ であり, } f(17) = -1$$

x	0		$\frac{52}{3}$	
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(\frac{52}{3})$	$\nearrow$

となるので, 命題 A は偽であり, 反例は $n = 17$ である.

次に, 命題 B を考える.

$5n + 5m + 3l = 1$ を用いて, $G = 10nm + 3ml + 3nl$ から l を消去すると,

$$G = m + n - 5m^2 - 5n^2$$

$(m, n) = (0, 0)$ のときは, $l = \frac{1}{3}$ となり, 不適である.

よって, $(m, n) \neq (0, 0)$ であり, このとき, $m^2 + n^2 > 0$, $m^2 \geq m$, $n^2 \geq n$ であるから,

$$5(m^2 + n^2) > m^2 + n^2 \geq m + n$$

ゆえに,

$$G = m + n - 5m^2 - 5n^2 < 0$$

となるので, 命題 B は真である. ■

以下、 $|x| \leq 1$ ……① において、 P の存在範囲 D を考える。

(i) のとき

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが 2 点 A, B を通るならば、

$$y = ax^2 - x - a \quad \text{……②}$$

と表せる。②は

$$y = a \left(x - \frac{1}{2a} \right)^2 - a - \frac{1}{4a}$$

となるので、頂点の x 座標の条件より、

$$\left| \frac{1}{2a} \right| \geq 1 \quad \therefore |a| \leq \frac{1}{2} \text{ かつ } a \neq 0 \quad \text{……③}$$

P の範囲は③のもとで②が通る部分である。

(ii) のとき

(ii) を満たす点 P は、直線 $y = -x$ ……④ 上にあるが、④は②で $a = 0$ とおいたものに等しい。

以上、(i), (ii) より、 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ ……⑤ のもとで、②が通り得る部分が D である。

したがって、①において

“②を a の方程式 $a(x^2 - 1) = x + y$ ……②' とみたとき、⑤の範囲に解をもつ” ……(*)

条件を求めればよい。

(I) $x^2 = 1$ のとき

(*) より、 $x + y = 0$ つまり、 $(x, y) = (1, -1), (-1, 1)$

(II) $x^2 < 1$ のとき

②' より、

$$a = \frac{x + y}{x^2 - 1} \quad \text{……②''}$$

であるから、②'' を⑤に代入し a を消去して、

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x + y}{x^2 - 1} \leq \frac{1}{2}$$

ここで、 $x^2 - 1 < 0$ より、これは

$$-\frac{1}{2}(x^2 - 1) \geq x + y \geq \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

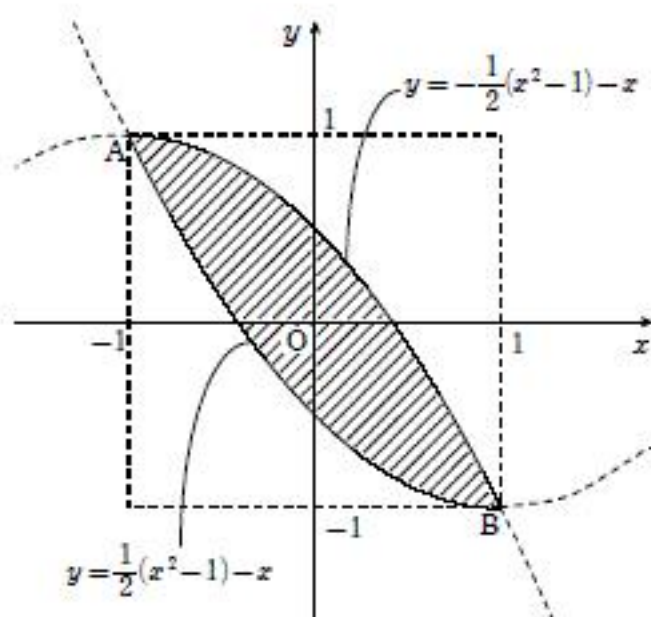
$$\therefore \frac{1}{2}(x^2 - 1) - x \leq y \leq -\frac{1}{2}(x^2 - 1) - x \quad \text{……⑥}$$

と同値。

⑥で $x = \pm 1$ とおくと、 $y = \mp 1$ (複号同順) となるので、(I), (II) を合わせて、

D : ① かつ ⑥

であり、図示すると下図の斜線部分となる(境界を含む)。



求める面積は、直線 $y = -x$ に関する対称性により、

$$2 \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 - 1) - x - (-x) \right\} dx$$

$$= 2 \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 - 1) \right\} dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{4}{3} \quad \text{……(答)}$$

となる。

第3問

C_1, C_2 の中心を K_1, K_2 , l と C_1 および C_2 との接点を P とし, 点 $(1, 0)$ を A とおくと,

$OP=OA=1$ であり, $K_1P \perp l$, $K_2P \perp l$

である.

図のように θ をとると,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots ①$$

であり,

$$r_1 = \tan \theta$$

また, $\angle K_2OP = \frac{\pi}{4} - \theta$ より,

$$r_2 = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

よって,

$$\begin{aligned} 8r_1 + 9r_2 &= 8 \tan \theta + \frac{9(1 - \tan \theta)}{1 + \tan \theta} \\ &= 8 \tan \theta - 9 + \frac{18}{1 + \tan \theta} \\ &= 8(\tan \theta + 1) + \frac{18}{1 + \tan \theta} - 17 \\ &\geq 2\sqrt{8(\tan \theta + 1) \cdot \frac{18}{1 + \tan \theta}} - 17 = 2\sqrt{8 \cdot 18} - 17 = 24 - 17 = 7 \end{aligned}$$

ここで, 等号成立条件は

$$(\tan \theta + 1)^2 = \frac{9}{4} \quad \text{すなわち, } \tan \theta = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ②$$

であり, ②を満たす θ は①の範囲にある.

よって, 求める最小値は 7

.....(答)

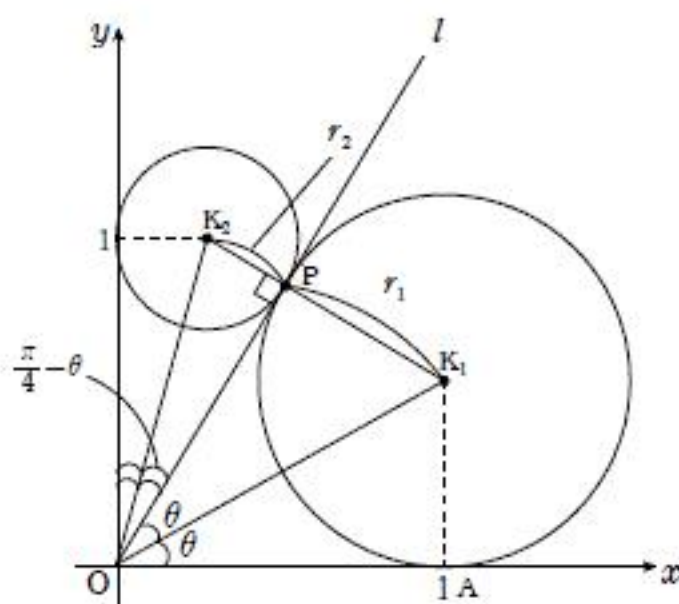
であり, このとき

$$\tan 2\theta = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

であるから, l の方程式は

$$y = \frac{4}{3}x \quad \dots\dots(\text{答})$$

となる.



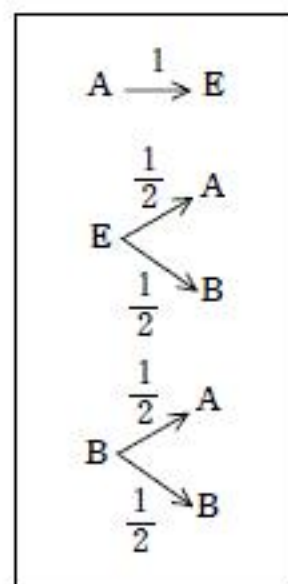
第4問

(1) コインの表が出たときに書く文字列 AA を改めて AE とする.

n 回コインを投げ、得られた文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n ,

E となる確率を q_n , B となる確率を r_n とおく.

右図より, $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ と p_n, q_n, r_n の関係は,



$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n & \dots\dots ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{n+1} = p_n & \dots\dots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n & \dots\dots ③ \end{cases}$$

ここで, $p_n + q_n + r_n = 1$ を用いて ① から r_n を消去すると,

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}(1 - p_n - q_n)$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n \quad \dots\dots ④$$

④ は $p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$ と変形でき, $p_1 = \frac{1}{2}$ より,

$$p_n - \frac{1}{3} = \left(p_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad (n \geq 1)$$

よって, 求める確率は, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} p_n + q_n &= p_n + p_{n-1} \\ &= \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} + \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

1 番目の文字が A となる確率は $p_1 = \frac{1}{2}$ であるから, 得られた式は $n=1$ でも成立する.

(2) $n-1$ 番目が E で, n 番目が B となるときであるから, 求める確率は, $n \geq 3$ のとき

$$q_{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}p_{n-2} = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

1 番目が E で, 2 番目が B となることはないので, これは $n=2$ でも成立する.