

第1問

$$y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a} \quad \text{より, 分母を払って整理して,}$$

$$4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0 \quad \dots\dots(*)$$

を得る.

(*)を満たす $a > 0$ が存在するような x, y の条件を求める.

(i) $x = \pm 1$ のとき, (*)は,

$$4ya = 1$$

となり, これを満たす $a > 0$ の存在条件は $y > 0$ である. よって,

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y > 0 \end{cases} \quad \dots\dots①$$

(ii) $|x| < 1$ のとき

$$((*) \text{の} 2 \text{解の積}) = \frac{1}{4(x^2-1)} < 0$$

であるから, (*)は $a > 0$ なる解をもつ.

よって,

$$|x| < 1 \quad \dots\dots②$$

(iii) $|x| > 1$ のとき

(*)が実数解をもつ条件は, (*)の判別式を D とおくと,

$$\frac{D}{16} = y^2 - (x^2 - 1) \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - y^2 \leq 1 \quad \dots\dots③$$

である.

$$((*) \text{の} 2 \text{解の積}) = \frac{1}{4(x^2-1)} > 0 \quad \text{であるから, } (*) \text{が } a > 0 \text{ となる解をもつ条件は, ③の}$$

下で,

$$((*) \text{の} 2 \text{解の和}) = \frac{y}{x^2-1} > 0 \quad \therefore y > 0$$

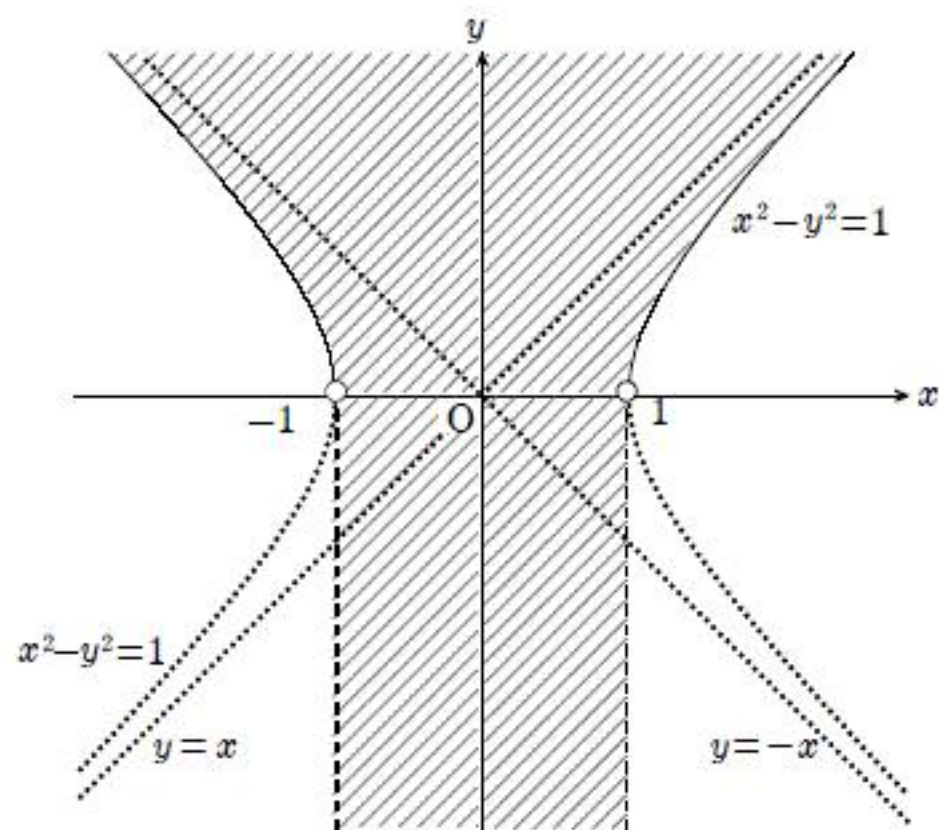
である.

よって,

$$\begin{cases} |x| > 1 \\ x^2 - y^2 \leq 1 \\ y > 0 \end{cases} \quad \dots\dots④$$

①, ②, ④から, C の通過する領域は以下の図の斜線部分のようになる.

ただし, 境界は実線部分を含み, 白丸・点線部分を含まない.



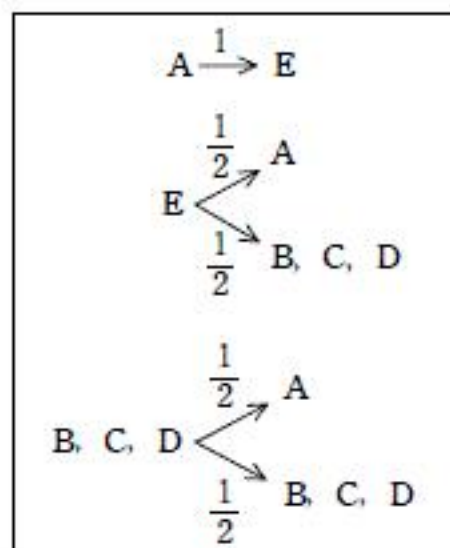
(1) さいころの出た目が 1, 2, 3 のときに書く文字列 AA を

改めて AE とする.

n 回さいころを投げ、得られた文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n , E となる確率を q_n ,

B, C または D となる確率を r_n とおくと,

右表より, $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ と p_n, q_n, r_n の関係は,



$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n & \dots\dots ① \\ q_{n+1} = p_n & \dots\dots ② \\ r_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n & \dots\dots ③ \end{cases}$$

ここで, $p_n + q_n + r_n = 1$ を用いて ① から r_n を消去すると,

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}(1 - p_n - q_n)$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n \quad \dots\dots ④$$

④ は $p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$ と変形でき,

$p_1 = \frac{1}{2}$ より,

$$p_n - \frac{1}{3} = \left(p_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad (n \geq 1)$$

よって, 求める確率は, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} p_n + q_n &= p_n + p_{n-1} \\ &= \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} + \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

1 番目の文字が A となる確率は $p_1 = \frac{1}{2}$ であるから, 得られた式は $n=1$ でも成立する.

(2) $n-1$ 番目が E で, n 番目が B となるときであるから, 求める確率は, $n \geq 3$ のとき

$$q_{n-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}p_{n-2} = \frac{1}{18}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

1 番目が E で, 2 番目が B となることはないので, これは $n=2$ でも成立する.

第3問

(1) $f(x) = ax^p - \log x$ ($x > 0$) とおくと,

$$f'(x) = apx^{p-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(apx^p - 1)$$

また,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a \log x \left(\frac{x^p}{\log x} - \frac{1}{a} \right) = +\infty \end{cases}$$

に注意すると, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	(0)		$(ap)^{-\frac{1}{p}}$		$(+\infty)$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$(+\infty)$	$\searrow$		$\nearrow$	$(+\infty)$

$y = ax^p$ と $y = \log x$ の共有点が1つである条件は $f(x) = 0$ となる x がただ1つであることであり,

$$f\left((ap)^{-\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \log(ap) = \frac{1}{p} \{1 + \log(ap)\} = 0$$

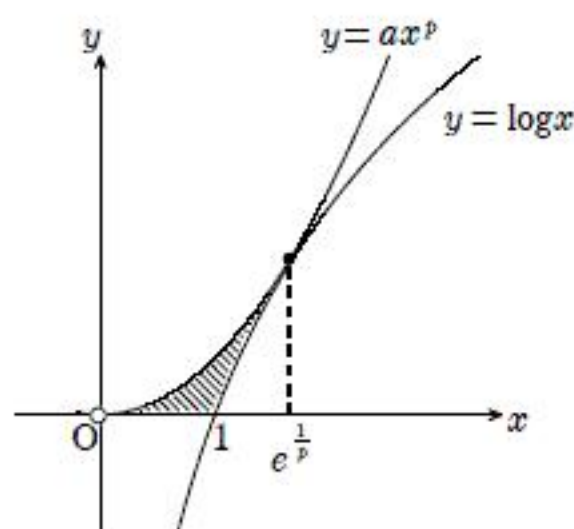
よって,

$$\log(ap) = -1$$

$$ap = \frac{1}{e} \quad \therefore a = \frac{1}{ep} \quad \text{.....(答)}$$

このとき点 Q の x 座標は, $x = (ap)^{-\frac{1}{p}} = e^{\frac{1}{p}}$ (答)

(2) (1)の増減表より $y = ax^p$ と $y = \log x$ のグラフの関係は下図のようになる.



$c = e^{\frac{1}{p}}$ とすると求める体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^c \pi (ax^p)^2 dx - \int_1^c \pi (\log x)^2 dx \\ &= \pi a^2 \int_0^c x^{2p} dx - \pi \int_1^c (\log x)^2 dx \end{aligned}$$

ここで,

$$\int_0^c x^{2p} dx = \left[\frac{1}{2p+1} x^{2p+1} \right]_0^c = \frac{1}{2p+1} c^{2p+1}$$

また,

$$\begin{aligned} \int_1^c (\log x)^2 dx &= \left[x(\log x)^2 \right]_1^c - 2 \int_1^c \log x dx \\ &= c(\log c)^2 - 2[x \log x]_1^c + 2 \int_1^c dx \\ &= c(\log c)^2 - 2c \log c + 2c - 2 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} V &= \pi a^2 \cdot \frac{1}{2p+1} c^{2p+1} - \pi c(\log c)^2 + 2\pi c \log c - 2\pi c + 2\pi \\ &= \pi \cdot \frac{1}{e^2 p^2} \cdot \frac{1}{2p+1} e^{\frac{2p+1}{p}} - \pi e^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{p^2} + 2\pi e^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{p} - 2\pi e^{\frac{1}{p}} + 2\pi \quad \left(\because a = \frac{1}{ep}, c = e^{\frac{1}{p}} \right) \\ &= \left\{ \frac{1}{p^2(2p+1)} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} - 2 \right\} \pi e^{\frac{1}{p}} + 2\pi \\ &= \left\{ \frac{1 - (2p+1) + 2p(2p+1) - 2p^2(2p+1)}{p^2(2p+1)} \right\} \pi e^{\frac{1}{p}} + 2\pi \\ &= \frac{2p^2 - 4p^3}{p^2(2p+1)} \pi e^{\frac{1}{p}} + 2\pi \\ &= \left\{ \frac{2(1-2p)}{2p+1} e^{\frac{1}{p}} + 2 \right\} \pi \quad \text{.....(答)} \end{aligned}$$

(3) $V = 2\pi$ となる条件は,

$$\frac{2(1-2p)}{2p+1} e^{\frac{1}{p}} = 0 \quad \therefore 1-2p=0 \quad \therefore p = \frac{1}{2} \quad \text{.....(答)}$$

第4問

(1) 帰納的に $p_n > 0$ である.

$$r_n = \frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \text{ とおく. 与えられた漸化式}$$

$$p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad \dots\dots ①$$

より,

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{p_{n+2}^2 + p_{n+1}^2 + 1}{p_{n+2}p_{n+1}} = \frac{\left(\frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n}\right)^2 + p_{n+1}^2 + 1}{\frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \cdot p_{n+1}} \\ &= \frac{(p_{n+1}^2 + 1)^2 + p_n^2(p_{n+1}^2 + 1)}{p_n p_{n+1} (p_{n+1}^2 + 1)} \\ &= \frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n} \\ &= r_n \end{aligned}$$

$$\text{よって, } r_n = \frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n} \text{ は } n \text{ によらない.} \quad \blacksquare$$

(2) $p_1 = 1, p_2 = 2$ より

$$r_1 = \frac{p_2^2 + p_1^2 + 1}{p_2 p_1} = \frac{4 + 1 + 1}{2 \cdot 1} = 3$$

よって, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して,

$$\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n} = 3 \quad \dots\dots ②$$

が成り立つ.

$n \geq 2$ のとき, ①で n の代わりに $n-1$ とおくと,

$$p_{n+1} = \frac{p_n^2 + 1}{p_{n-1}} \quad \therefore p_n^2 + 1 = p_{n+1}p_{n-1} \quad \dots\dots ③$$

③を②の左辺の分子に代入すると,

$$\frac{p_{n+1}(p_{n+1} + p_{n-1})}{p_{n+1}p_n} = 3 \quad \therefore \frac{p_{n+1} + p_{n-1}}{p_n} = 3$$

したがって,

$$p_{n+1} + p_{n-1} = 3p_n \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots ④ \text{ (答)}$$

(3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して,

$$p_n = q_{2n-1} \quad \dots\dots ⑤$$

が成立することを数学的帰納法で示す.

(I) $p_1 = 1, q_1 = 1$ より, $n = 1$ のとき⑤は成り立つ.

$p_2 = 2, q_3 = q_2 + q_1 = 2$ より, $n = 2$ のとき⑤は成り立つ.

(II) $n = k-1, k$ のとき, ⑤が成り立つとする. すなわち,

$$p_{k-1} = q_{2k-3}, p_k = q_{2k-1}$$

$k \geq 2$ であるから, ④より,

$$p_{k+1} = 3p_k - p_{k-1} = 3q_{2k-1} - q_{2k-3} \quad \dots\dots ⑥$$

となる.

ここで, $\{q_n\}$ の漸化式より,

$$q_{2k-1} = q_{2k-2} + q_{2k-3} \quad \therefore q_{2k-3} = q_{2k-1} - q_{2k-2} \quad \dots\dots ⑦$$

⑦を⑥に代入して

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= 3q_{2k-1} - (q_{2k-1} - q_{2k-2}) \\ &= 2q_{2k-1} + q_{2k-2} \end{aligned}$$

さらに,

$$q_{2k-2} = q_{2k} - q_{2k-1}$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= 2q_{2k-1} + (q_{2k} - q_{2k-1}) \\ &= q_{2k} + q_{2k-1} \\ &= q_{2k+1} = q_{2(k+1)-1} \quad (\{q_n\} \text{ の漸化式による}) \end{aligned}$$

よって, ⑤は $n = k+1$ のときに成り立つ.

(I), (II)より, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して⑤が成り立つ. $\blacksquare$

第5問

$N = 2015 + 1 = 2016 = 63 \cdot 2^5$ とおくと、

$$\begin{aligned} {}_{2015}C_m &= \frac{2015 \cdot 2014 \cdot \dots \cdot (2015 - m + 1)}{m!} \\ &= \frac{(N-1)(N-2) \cdot \dots \cdot (N-m)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, 2^5 - 1$ に対して、

$$k = 2^p \cdot q \quad (p \text{ は整数で } 0 \leq p < 5, \quad q \text{ は奇数})$$

と表す。すると、

$$N - k = 63 \cdot 2^5 - 2^p \cdot q = 2^p (63 \cdot 2^{5-p} - q)$$

であり、 $5 - p > 0$ より $63 \cdot 2^{5-p} - q$ は奇数である。よって、 k と $N - k$ の2のべき乗の約数は一致する

したがって、 $1 \leq m < 2^5$ のとき、

$${}_{2015}C_m = \frac{(N-1)(N-2) \cdot \dots \cdot (N-m)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$$

において分子、分母の2のべき乗の約数は一致するので、 ${}_{2015}C_m$ は奇数である。

一方、 $m = 2^5$ のとき、

$$N - 2^5 = 63 \cdot 2^5 - 2^5 = 62 \cdot 2^5$$

であるから、

$$\begin{aligned} {}_{2015}C_{2^5} &= \frac{(N-1)(N-2) \cdot \dots \cdot (N-2^5+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2^5-1)} \cdot \frac{62 \cdot 2^5}{2^5} \\ &= {}_{N-1}C_{2^5-1} \cdot 62 = 62 \cdot {}_{2015}C_{31} \end{aligned}$$

となり、これは偶数である。

以上より、求める最小の m は、

$$m = 2^5 = 32 \quad \dots\dots (\text{答})$$

である。

(1) $I = n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx$ とおく.

$|nx| > 1$, つまり, $|x| > \frac{1}{n}$ のとき, $g(nx) = 0$ であるから,

$$I = n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) f(x) dx$$

$|x| \leq \frac{1}{n}$ のとき, $p \leq f(x) \leq q$, $g(nx) \geq 0$ であるから,

$$pg(nx) \leq g(nx)f(x) \leq qg(nx)$$

よって,

$$n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} pg(nx) dx \leq n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x) dx \leq n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} qg(nx) dx$$

$$\therefore np \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) dx \leq I \leq nq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) dx \quad \dots\dots ①$$

ここで, $|x| \leq \frac{1}{n}$ のとき, $|nx| \leq 1$ であるから, $g(nx) = \frac{\cos(\pi nx) + 1}{2}$ より

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos(\pi nx) + 1}{2} dx = \left[\frac{1}{2\pi n} \sin(\pi nx) + \frac{1}{2} x \right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

よって, ①より

$$np \cdot \frac{1}{n} \leq I \leq nq \cdot \frac{1}{n} \quad \therefore p \leq I \leq q \quad \blacksquare$$

(2) $J_n = n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx$

とおく.

$|nx| > 1$, つまり, $|x| > \frac{1}{n}$ のとき, $h(nx) = 0$ より

$$J_n = n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx \quad \dots\dots ②$$

ここで, $|x| \leq 1$ のとき

$$g'(x) = \left\{ \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} \right\}' = -\frac{\pi}{2} \sin \pi x = h(x)$$

より, $|nx| \leq 1$, つまり, $|x| \leq \frac{1}{n}$ のとき

$$\frac{d}{dx} g(nx) = ng'(nx) = nh(nx)$$

よって, ②より

$$\begin{aligned} J_n &= n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left\{ \frac{d}{dx} g(nx) \right\} \log(1 + e^{x+1}) dx \\ &= n \left[g(nx) \log(1 + e^{x+1}) \right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} - n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) \{ \log(1 + e^{x+1}) \}' dx \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

ここで, $g(1) = g(-1) = 0$ であるから,

$$f(x) = \{ \log(1 + e^{x+1}) \}' = \frac{e^{x+1}}{1 + e^{x+1}}$$

とおくと, ③より

$$J_n = -n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) f(x) dx \quad \dots\dots ④$$

$f(x) = \frac{e^{x+1}}{1 + e^{x+1}} = 1 - \frac{1}{1 + e^{x+1}}$ は単調増加であり,

$|x| \leq \frac{1}{n}$ のとき, $f\left(-\frac{1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$ が成り立つので, (1)より,

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx = n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) f(x) dx \leq f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \dots\dots ⑤$$

$$④, ⑤より, -f\left(\frac{1}{n}\right) \leq J_n \leq -f\left(-\frac{1}{n}\right) \quad \dots\dots ⑥$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0)$$

であるから, ⑥ではさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = -f(0) = -\frac{e}{1+e} \quad \dots\dots (答)$$