

第1問

$\triangle PQR$ が鋭角三角形である条件は,

$$\begin{cases} PQ^2 + QR^2 > RP^2 & \cdots \cdots ① \\ QR^2 + RP^2 > PQ^2 & \cdots \cdots ② \\ RP^2 + PQ^2 > QR^2 & \cdots \cdots ③ \end{cases}$$

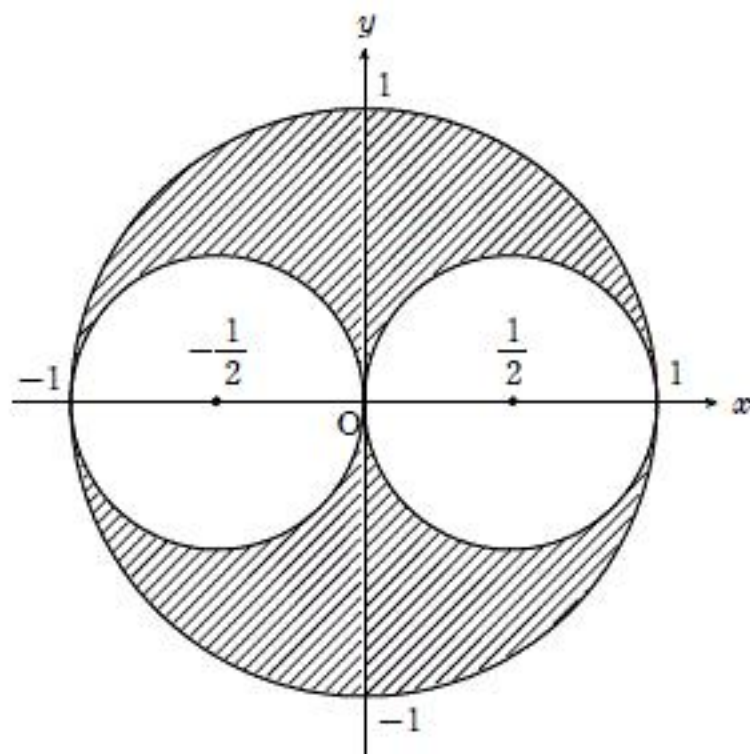
である.

$PQ^2 = 4(x^2 + y^2)$, $QR^2 = (x+1)^2 + y^2$, $RP^2 = (x-1)^2 + y^2$ より,

$$\begin{cases} ①は, 4x^2 + 4x + 4y^2 > 0, \text{ つまり, } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} & \cdots \cdots ④ \\ ②は, -2x^2 - 2y^2 + 2 > 0, \text{ つまり, } x^2 + y^2 < 1 & \cdots \cdots ⑤ \quad \cdots \cdots (答) \\ ③は, 4x^2 - 4x + 4y^2 > 0, \text{ つまり, } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} & \cdots \cdots ⑥ \end{cases}$$

となる. しだがつて, 求める (x, y) の条件④かつ⑤かつ⑥を図示すると下図の斜線部のようになる.

ただし, 境界は含まない.



第2問

(1) 優勝チームが決まらないのは,

(i) 最初に A が勝つ場合

勝者が

ACBACBACB……

と ACB が繰り返されるときである.

(ii) 最初に B が勝つ場合

勝者が

BCABCABCA……

と BCA が繰り返されるときである.

よって, A が 5 試合目で優勝するのは, 勝者が

ACBAA

となるときである. よって, 求める確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) A が優勝するのは, 勝者が

AA, ACBAA, ACBACBAA, ACBACBACBAA, ……

または

BCAA, BCABCAA, BCABCABCAA, ……

のときであるから, 求める確率は, $k=1, 2, \dots\dots$ に対し

$$\begin{cases} n=3k \text{ のとき,} & 0 \\ n=3k-1 \text{ のとき,} & \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ n=3k+1 \text{ のとき,} & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) 求める確率は,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1} + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} + \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{5}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1 \left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right)}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{5}{14} - \frac{3}{28} \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

第3問

(1) A, B の共有点の座標は,

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + px + q \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

より,

$$x^2 = -x^2 + px + q$$

これを整理すると

$$x^2 - \frac{p}{2}x - \frac{q}{2} = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

A と B は点 $(-1, 1)$ で接しているので, 方程式②は $x = -1$ を重解にもつ.

解と係数の関係より,

$$\begin{cases} (-1) + (-1) = \frac{p}{2} \\ (-1)^2 = -\frac{q}{2} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = -4 \\ q = -2 \end{cases} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) まず, 放物線 C の方程式を求める.

(1)の結果と与えられた条件より,

$$y - t = -(x - 2t)^2 - 4(x - 2t) - 2 \quad (t > 0)$$

展開して整理すると,

$$y = -x^2 + (4t - 4)x - 4t^2 + 9t - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで, A と C の共有点の x 座標を調べる.

①, ③より,

$$x^2 = -x^2 + (4t - 4)x - 4t^2 + 9t - 2$$

これを整理すると,

$$x^2 - 2(t - 1)x + 2t^2 - \frac{9}{2}t + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

A と C が領域を囲むための条件は, 方程式④が 2 つの異なる実数解をもつことであるから,

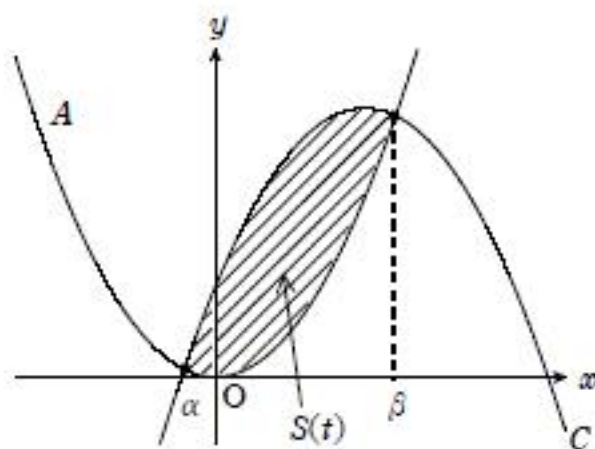
$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (t - 1)^2 - 2t^2 + \frac{9}{2}t - 1 \\ &= -t^2 + \frac{5}{2}t > 0 \\ \therefore 0 < t < \frac{5}{2} \end{aligned}$$

このとき, 共有点の x 座標は

$$x = t - 1 \pm \sqrt{-t^2 + \frac{5}{2}t}$$

$$\alpha = t - 1 - \sqrt{-t^2 + \frac{5}{2}t}, \quad \beta = t - 1 + \sqrt{-t^2 + \frac{5}{2}t} \quad \text{とおくと,}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} (\textcircled{3} \text{の右辺} - \textcircled{1} \text{の右辺}) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ x^2 - 2(t - 1)x + 2t^2 - \frac{9}{2}t + 1 \right\} dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \cdot (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(2\sqrt{-t^2 + \frac{5}{2}t} \right)^3 \\ &= \frac{8}{3} \left(-t^2 + \frac{5}{2}t \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$



$t \geq \frac{5}{2}$ のときは, A と C は領域を囲まないなので, $S(t) = 0$ である.

したがって,

$$\begin{cases} 0 < t < \frac{5}{2} \text{ のとき, } S(t) = \frac{8}{3} \left(-t^2 + \frac{5}{2}t \right)^{\frac{3}{2}} \\ t \geq \frac{5}{2} \text{ のとき, } S(t) = 0 \end{cases} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) $0 < t < \frac{5}{2}$ のとき, $-t^2 + \frac{5}{2}t$ の最大値を求める.

$$-t^2 + \frac{5}{2}t = -\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{16}$$

したがって, $t = \frac{5}{4}$ のとき, 最大値 $\frac{25}{16}$ をとる.

よって, $S(t)$ は $t = \frac{5}{4}$ のとき, 最大値

$$S\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{8}{3} \left(\frac{25}{16} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{25}{16} \cdot \frac{5}{4} = \frac{125}{24} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

をとる.

第4問

(1)

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n \text{ を } 4 \text{ で割った余りが } 1 \text{ のとき}) \\ 9 & (n \text{ を } 4 \text{ で割った余りが } 2 \text{ のとき}) \\ 7 & (n \text{ を } 4 \text{ で割った余りが } 3 \text{ のとき}) \\ 1 & (n \text{ を } 4 \text{ で割った余りが } 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$

m を 0 以上の整数として,

$$3^{2m} = (3^2)^m = 9^m = (4 \times 2 + 1)^m \equiv 1 \pmod{4}$$

よって,

$$3^{2m+1} \equiv 3 \pmod{4}$$

ゆえに,

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) 与えられた条件より, x_n はすべて奇数である.

よって, $n \geq 2$ のときは, (2)の結果より, x_n は 4 で割ると 3 余る.

したがって, $n \geq 3$ のとき, (1)の結果より, x_n は 10 で割ると 7 余る. ゆえに,

x_{10} を 10 で割った余りは, 7 \dots\dots(\text{答})

である.