

第1問

まず、 $x > 0$  に対し  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e$  を示す.

$f_1(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  とおくと,

$$\log f_1(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

そこで、 $g_1(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$  とおく.

$f_1(x) > 0$  より、 $f_1'(x)$  の正負は  $g_1(x)$  の正負と一致する.

$$g_1'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0 \quad (x > 0)$$

したがって、 $g_1(x)$  は単調減少である. 一方,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right\} = \log(1+0) - 0 = 0$$

よって、 $g_1(x) > 0$  が成り立つ.

したがって、 $f_1(x)$  は単調増加であり、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = e$  であるから、 $f_1(x) < e$  が成り立つ.

次に、 $x > 0$  に対し  $e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$  を示す.

$f_2(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$  とおくと,

$$\log f_2(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{f_2'(x)}{f_2(x)} = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x + \frac{1}{2}}{x(x+1)}$$

そこで、 $g_2(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x + \frac{1}{2}}{x(x+1)}$  とおく.

$f_2(x) > 0$  より、 $f_2'(x)$  の正負は  $g_2(x)$  の正負と一致する.

$$g_2'(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$$

したがって、 $g_2(x)$  は単調増加である. 一方,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1 + \frac{1}{2x}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right\} = \log 1 - 0 = 0$$

よって、 $g_2(x) < 0$  が成り立つ.

したがって、 $f_2(x)$  は単調減少であり、

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = e \cdot (1+0) = e$$

であるから、 $f_2(x) > e$  が成り立つ.

以上より、

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

第2問

(1) 優勝チームが決まらないのは、

(i) 最初に A が勝つ場合

勝者が

ACBACBACB……

と ACB が繰り返されるときである。

(ii) 最初に B が勝つ場合

勝者が

BCABCABCA……

と BCA が繰り返されるときである。

よって、A が優勝するのは、勝者が

AA, ACBAA, ACBACBAA, ACBACBACBAA, …… ①

または、

BCAA, BCABCAA, BCABCABCAA, …… ②

のときであるから、求める確率は、 $k=1, 2, ……$  に対し

$$\begin{cases} n=3k \text{ のとき, } & 0 \\ n=3k-1 \text{ のとき, } & \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ n=3k+1 \text{ のとき, } & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases} \quad ……(\text{答})$$

(2)  $m \geq 2$  のとき、総試合数が  $3m$  回以下で A が優勝する確率は、①、②より

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1} + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} + \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{5}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{\frac{1}{8} \left[ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} \right]}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{5}{14} - \frac{3}{28} \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} \quad ……③ \end{aligned}$$

最後の対戦相手が B で、A が優勝するのは②の場合であるから、その確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{8} \left[ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} \right]}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{1}{14} \left[ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} \right] \quad ……④ \end{aligned}$$

求める条件付き確率は④÷③より、

$$\frac{2(8^{m-1}-1)}{10 \cdot 8^{m-1}-3}$$

またこれは  $m=1$  のときも成り立つ。 よって求める答えは、

$$\frac{2(8^{m-1}-1)}{10 \cdot 8^{m-1}-3} \quad ……(\text{答})$$

### 第3問

$$P_1(1, 0, 1), P_2(1, 1, 1), P_3(1, 0, 3), Q(0, 0, a) \quad (1 < a < 3)$$

まず  $R_1, R_2, R_3$  を求める.

$$\overrightarrow{QP_1} = (1, 0, 1-a)$$

$$\overrightarrow{QP_2} = (1, 1, 1-a)$$

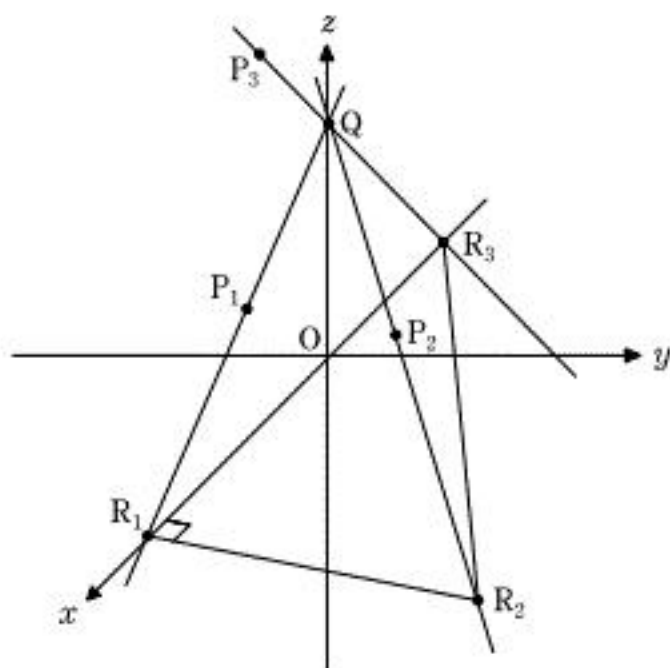
$$\overrightarrow{QP_3} = (1, 0, 3-a)$$

であるから,  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$  を用いて,

$$\text{直線 } P_1Q: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-a \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\text{直線 } P_2Q: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-a \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\text{直線 } P_3Q: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3-a \end{pmatrix} t_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$



と表せる.

$z=0$  として,  $xy$  平面との交点を求めると,

$$(1-a)t_1 + a = 0 \quad \text{より,} \quad t_1 = \frac{a}{a-1}$$

$$(1-a)t_2 + a = 0 \quad \text{より,} \quad t_2 = \frac{a}{a-1}$$

$$(3-a)t_3 + a = 0 \quad \text{より,} \quad t_3 = \frac{a}{a-3}$$

よって,

$$R_1\left(\frac{a}{a-1}, 0, 0\right), R_2\left(\frac{a}{a-1}, \frac{a}{a-1}, 0\right), R_3\left(\frac{a}{a-3}, 0, 0\right)$$

直線  $R_1R_2$ , 直線  $R_1R_3$  はそれぞれ  $y$  軸,  $x$  軸と平行であるから,  $\triangle R_1R_2R_3$  は  $\angle R_2R_1R_3$  が直角の直角三角形である. したがって,

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a-1} \left( \frac{a}{a-1} - \frac{a}{a-3} \right) = \frac{-a^2}{(a-1)^2(a-3)}$$

$$S'(a) = \frac{-2a(a-1)^2(a-3) + a^2(3a^2 - 10a + 7)}{(a-1)^4(a-3)^2}$$

$$= \frac{a}{(a-1)^4(a-3)^2} \{-2(a-1)^2(a-3) + a(a-1)(3a-7)\}$$

$$= \frac{a(a-2)(a+3)}{(a-1)^3(a-3)^2}$$

$S(a)$  は右表のように増減するから,

$S(a)$  は  $a=2$  で最小値

$$S(2) = 4 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

をとる.

|         |              |            |   |            |              |
|---------|--------------|------------|---|------------|--------------|
| $a$     | ( 1 )        |            | 2 |            | ( 3 )        |
| $S'(a)$ | ( - )        | -          | 0 | +          | ( + )        |
| $S(a)$  | ( $\infty$ ) | $\searrow$ | 4 | $\nearrow$ | ( $\infty$ ) |

#### 第4問

$z=1$  のとき A, B, C は同一の点,  $z=0$  のとき B, C が同一の点,  $z=-1$  のとき A, C が同一の点となるので, A, B, C は三角形をなさない.

そこで,  $z \neq 0, \pm 1$  とする.

$$\angle BAC \text{ が鋭角である条件は, } -\frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{z^2-1}{z-1}\right) < \frac{\pi}{2}, \text{ すなわち } -\frac{\pi}{2} < \arg(z+1) < \frac{\pi}{2}$$

したがって,

$$z \text{ の実部} > -1 \quad \dots\dots ①$$

である.

$$\angle ABC \text{ が鋭角である条件は, } -\frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{z^2-z}{1-z}\right) < \frac{\pi}{2}, \text{ すなわち } -\frac{\pi}{2} < \arg(-z) < \frac{\pi}{2}$$

したがって,

$$z \text{ の実部} < 0 \quad \dots\dots ②$$

である.

$$\angle BCA \text{ が鋭角である条件は, } -\frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{1-z^2}{z-z^2}\right) < \frac{\pi}{2}, \text{ すなわち } -\frac{\pi}{2} < \arg\left(1+\frac{1}{z}\right) < \frac{\pi}{2}$$

したがって,

$$\frac{1}{z} \text{ の実部} > -1 \quad \dots\dots ③$$

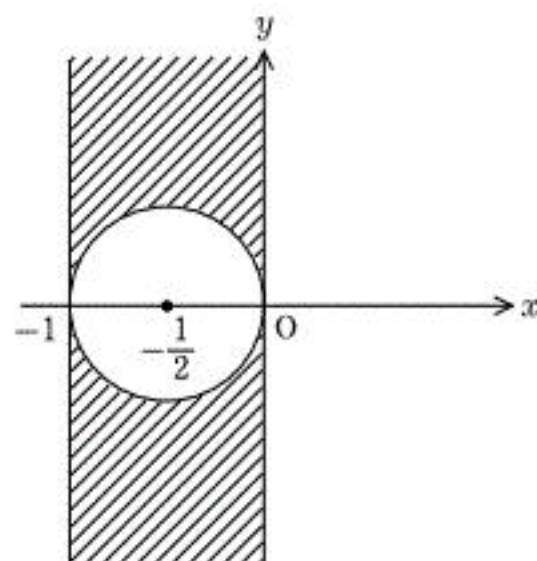
である.

ここで,

$$\begin{aligned} ③ &\iff \frac{1}{z} + \frac{1}{z} > -2 \\ &\iff z + \bar{z} > -2z\bar{z} \\ &\iff \left(z + \frac{1}{2}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{2}\right) > \frac{1}{4} \\ &\iff \left|z + \frac{1}{2}\right|^2 > \frac{1}{4} \\ &\iff \left|z + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

①, ②, ④を図示すると右図のようになる.

(境界は含まない)



(注) 2点間の距離の関係からも容易に導かれる.



# 第5問

(1)  $A_k = 0.a_1 a_2 \cdots a_k$  とおく.

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &\iff A_k + 10^k \leq \sqrt{n} < A_k + 10^{-k} + 10^k \\ &\iff 10^{2k} + 2 \cdot 10^k A_k + A_k^2 \leq n < 10^{2k} + 2 \cdot 10^k A_k + 2 + (A_k + 10^{-k})^2 \quad \cdots \cdots ① \end{aligned}$$

ここで、 $0 < A_k \leq 1 - 10^{-k}$  より、 $0 < A_k^2 < 1$ 、 $0 < (A_k + 10^{-k})^2 \leq 1$  であるから、

$$\begin{cases} 10^{2k} + 2 \cdot 10^k A_k < 10^{2k} + 2 \cdot 10^k A_k + A_k^2 < 10^{2k} + 2 \cdot 10^k A_k + 1 \\ 10^{2k} + 2 \cdot 10^k A_k + 2 < 10^{2k} + 2 \cdot 10^k A_k + 2 + (A_k + 10^{-k})^2 \leq 10^{2k} + 2 \cdot 10^k A_k + 3 \end{cases} \quad \cdots \cdots ②$$

$10^{2k}$ 、 $2 \cdot 10^k A_k$  は整数であるから、①、②より

$$\begin{aligned} n &= 10^{2k} + 2 \cdot 10^k A_k + 1, \quad 10^{2k} + 2 \cdot 10^k A_k + 2 \\ &= 10^{2k} + 2(10^{k-1} a_1 + 10^{k-2} a_2 + \cdots + a_k) + 1, \\ &10^{2k} + 2(10^{k-1} a_1 + 10^{k-2} a_2 + \cdots + a_k) + 2 \end{aligned} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) (1)と同様に考えると、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &\iff \underbrace{p^2 + 2pA_k + A_k^2}_{\alpha} \leq m < \underbrace{p^2 + 2pA_k + 2p \cdot 10^{-k} + (A_k + 10^{-k})^2}_{\beta} \\ \beta - \alpha &= 2p \cdot 10^{-k} + 2 \cdot A_k \cdot 10^{-k} + 10^{-2k} > 2p \cdot 10^{-k} > 2 \cdot 5 \cdot 10^{k-1} \cdot 10^{-k} = 1 \end{aligned}$$

一般に、任意の実数  $x$  に対して、 $x \leq y < x+1$  となる整数  $y$  が存在するので  
 $\alpha \leq m < \beta$  を満たす整数  $m$  が存在する。 ■

(3)  $\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1 a_2 \cdots a_k$  とかける正の整数  $s$  が存在すると仮定すると、

$0 < 0.a_1 a_2 \cdots a_k < 1$  と、 $[\sqrt{s}]$  が整数であることより、 $\sqrt{s}$  は整数ではない。

一方、 $[\sqrt{s}] + 0.a_1 a_2 \cdots a_k$  は有理数であるから、 $\sqrt{s} = \frac{q}{p}$  ( $p \geq 2$ ) となる互いに素な正の整数  $p, q$  の組が存在する。

$$\sqrt{s} = \frac{q}{p} \iff s = \frac{q^2}{p^2} \iff s \cdot p^2 = q^2$$

ここで、 $p, q$  は互いに素より、 $p^2 = 1$  かつ  $s = q^2$  となるが、これは  $p \geq 2$  に反する。

ゆえに、 $\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1 a_2 \cdots a_k$  となる正の整数  $s$  は存在しない。 ■

# 第6問

問題の立体  $K$  は  $z$  軸に関する回転対称性をもつので、 $xz$  平面による断面  $L$  を考える。そこで、線分  $AB$  が  $xz$  平面内にあるとして、 $AB$  上の点  $P(X, Z)$  ( $Z \geq 1$ ) の存在範囲を考える。

(i)  $Z=1$  のとき

点  $P$  は  $(0, 1)$  である。

(ii)  $Z > 1$  のとき

条件(a), (b)より、直線  $PC$  と  $x$  軸の交点  $A$  について  $PA \leq 2$  である。

$X \neq 0$  のとき、直線  $PC$  の方程式は  $z = \frac{Z-1}{X}x + 1$  であるか

ら、 $z=0$  として、 $A\left(\frac{X}{1-Z}, 0\right)$  (これは  $X=0$  のときも正しい)

よって、

$$PA = \sqrt{\left(X - \frac{X}{1-Z}\right)^2 + Z^2} = \sqrt{\left(\frac{Z}{1-Z}\right)^2 X^2 + Z^2} \leq 2$$

$$\left(\frac{Z}{1-Z}\right)^2 X^2 + Z^2 \leq 4$$

(i), (ii)をまとめて、

$$X^2 \leq \frac{(4-Z^2)(1-Z)^2}{Z^2}$$

右辺が 0 以上となるのは、 $1 \leq Z \leq 2$  のときであるから、領域  $L$  の  $z \geq 1$  を満たす部分は

$$|x| \leq \sqrt{\frac{(4-z^2)(1-z)^2}{z^2}} \quad (1 \leq z \leq 2)$$

と表せる。

よって、この領域を  $z$  軸まわりに回転した立体の体積は、境界の方程式  $x = \sqrt{\frac{(4-z^2)(1-z)^2}{z^2}}$  を用いて、

$$\begin{aligned} \int_1^2 \pi x^2 dz &= \pi \int_1^2 \frac{(4-z^2)(1-z)^2}{z^2} dz \\ &= \pi \int_1^2 \frac{4-8z+3z^2+2z^3-z^4}{z^2} dz \\ &= \pi \int_1^2 \left( \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z} + 3 + 2z - z^2 \right) dz \\ &= \pi \left[ -\frac{4}{z} - 8 \log z + 3z + z^2 - \frac{1}{3} z^3 \right]_1^2 \\ &= \pi \left\{ \left( -2 - 8 \log 2 + 6 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left( -4 + 3 + 1 - \frac{1}{3} \right) \right\} \\ &= \pi \left( \frac{17}{3} - 8 \log 2 \right) \end{aligned}$$

.....(答)

