

第1問

放物線 A と B がただ1点を共有するための条件は、 x の2次方程式

$$s(x-1)^2 = -x^2 + t^2 \iff (s+1)x^2 - 2sx + s - t^2 = 0 \quad (s+1 > 0)$$

が重解をもつことである.

よって,

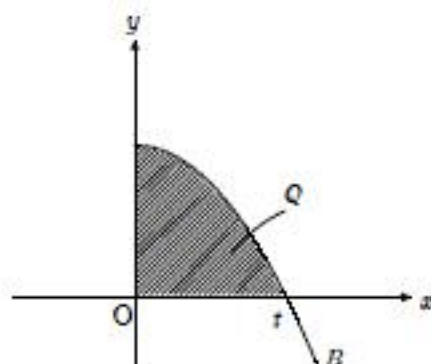
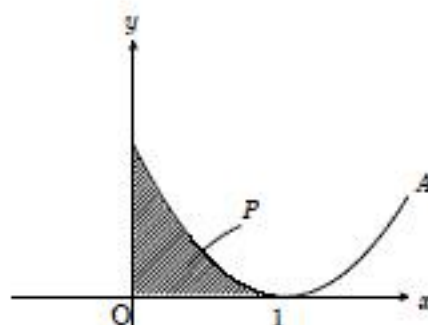
$$\frac{\text{判別式}}{4} = s^2 - (s+1)(s-t^2) = 0$$

$$\therefore s = \frac{t^2}{1-t^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

一方,

$$P = \int_0^1 s(x-1)^2 dx = \left[\frac{s}{3}(x-1)^3 \right]_0^1 = \frac{s}{3}$$

$$Q = \int_0^t (-x^2 + t^2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + t^2x \right]_0^t = \frac{2}{3}t^3$$



であるから,

$$\frac{Q}{P} = \frac{2}{3}t^3 \cdot \frac{3}{s} = \frac{2t^3}{s} = 2t(1-t^2) \quad (\because \textcircled{1})$$

そこで, $f(t) = 2t(1-t^2)$ とおき, $0 < t < 1$ における最大値を求める.

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 - 6t^2 \\ &= 2(1 - 3t^2) \end{aligned}$$

増減表より, $\frac{Q}{P}$ の最大値は,

t	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	(1)
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗		↘	

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

第2問

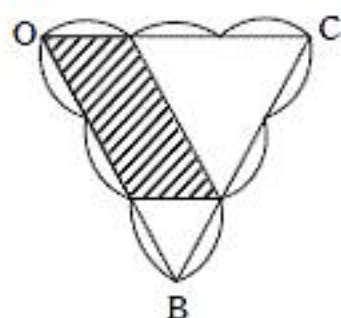
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &= -\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OC} \quad (0 \leq t \leq 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{OB} \quad (0 \leq s \leq 1)\end{aligned}$$

と表せるから、

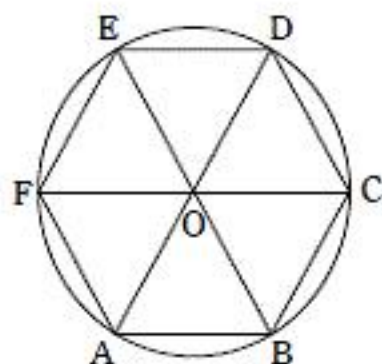
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} + s\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) + t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)\end{aligned}$$

よって、 R が描く図形は下図の斜線部分である平行四辺形を $\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$ だけ平行移動したものである。



ゆえに、その面積は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{9} \quad \dots\dots(\text{答}) \quad \text{である.}$$



第3問

(1) $(1, 0)$ または $(0, -1)$ に移動したときであるから、求める確率は $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ……(答)

(2) $y - x$ の値は、ある時刻から 1 秒後、

$(m, n) \rightarrow (m+1, n)$ または $(m, n) \rightarrow (m, n-1)$ と移動するとき…… -1

$(m, n) \rightarrow (m, n+1)$ または $(m, n) \rightarrow (m-1, n)$ と移動するとき…… $+1$

だけ増減するので、1 増える確率と 1 減る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。

したがって、6 秒後に直線 $y = x$ 上にあるのは

-1 の移動が 3 回、 $+1$ の移動が 3 回行われたときである。

よって、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot {}_6C_3 = \frac{5}{16} \quad \text{……(答)}$$

である。

第4問

$$(1) \quad \begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_2 &= 18 \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad \begin{aligned} a_1 a_n &= \left\{ p + \left(-\frac{1}{p} \right) \right\} \left\{ p^n + \left(-\frac{1}{p} \right)^n \right\} \\ &= p^{n+1} + \left(-\frac{1}{p} \right)^{n+1} - \left\{ p^{n-1} + \left(-\frac{1}{p} \right)^{n-1} \right\} \\ &= a_{n+1} - a_{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) 数学的帰納法で示す.

(i) a_1, a_2 は自然数.

(ii) $k=2, 3, \dots\dots$ について, $a_1, \dots\dots, a_k$ がすべて自然数のとき,

(2)より $a_{k+1} = a_{k-1} + 4a_k$ と表せるため, a_{k+1} も自然数.

(i), (ii) より, a_n は自然数であることが示された.

(4) $k=2, 3, \dots\dots$ のとき, $4a_k + a_{k-1} (= a_{k+1})$ と a_k の最大公約数は,

a_{k-1} と a_k の最大公約数に等しい.

これを繰り返し用いることで, a_{n+1} と a_n の最大公約数は

a_2 と a_1 の最大公約数に等しいことがわかる.

$a_1 = 2 \cdot 2, a_2 = 2 \cdot 9$ より, 求めるものは 2 \dots\dots(\text{答}) である.