

第1問

(1)

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= \cos 3\theta + a \cos 2\theta + b \cos \theta \\
 &= (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + a(2\cos^2 \theta - 1) + b \cos \theta \\
 &= 4x^3 - 3x + a(2x^2 - 1) + bx \\
 &= 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(\theta) &= \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos \theta - 1} \\
 &= \frac{4x^3 - 3x + a(2x^2 - 1) + bx - (a + b + 1)}{x - 1} \\
 &= \frac{4x^3 - 3x - 1 + 2a(x^2 - 1) + b(x - 1)}{x - 1} \\
 &= 4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1 \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) (1)より、 $g(\theta)$ の $0 < \theta < \pi$ の範囲における最小値は、

$$G(x) = 4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1 = 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + a + b$$

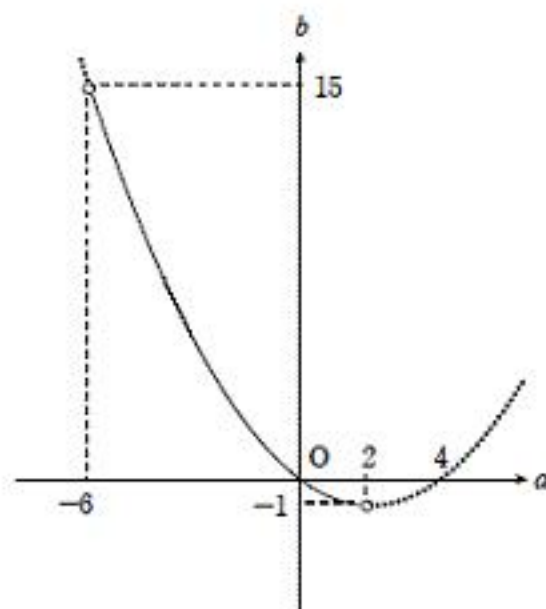
の $-1 < x < 1$ の範囲における最小値に等しい。

$G(x)$ は、軸が $-1 < x < 1$ の範囲にない場合は最小値を持たない。

よって、求める条件は、

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} -1 < -\frac{a+2}{4} < 1 \\ G\left(-\frac{a+2}{4}\right) = -\frac{1}{4}a^2 + a + b = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} -6 < a < 2 \\ b = \frac{1}{4}(a-2)^2 - 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

であり、図示して右図の放物線弧（実線部）を得る。



第2問

(1) $y=x$ の値は、ある時刻から 1 秒後、

$(m, n) \rightarrow (m+1, n)$ または $(m, n) \rightarrow (m, n-1)$ と移動するとき…… -1

$(m, n) \rightarrow (m, n+1)$ または $(m, n) \rightarrow (m-1, n)$ と移動するとき…… $+1$

だけ増減するので、1 増える確率と 1 減る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。

したがって、6 秒後に直線 $y=x$ 上にあるのは

-1 の移動が 3 回、 $+1$ の移動が 3 回行われたときである。

よって、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot {}_6C_3 = \frac{5}{16} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。

(2)

[解答 1]

① (m, n) から $(m+1, n)$ に進むことを $(+1, 0)$

② (m, n) から $(m, n+1)$ に進むことを $(0, +1)$

③ (m, n) から $(m-1, n)$ に進むことを $(-1, 0)$

④ (m, n) から $(m, n-1)$ に進むことを $(0, -1)$

と書くことにする。

①が a 回、②が b 回、③が c 回、④が d 回行われるとすると、 a, b, c, d に対する条件は、

$$a(+1, 0) + b(0, +1) + c(-1, 0) + d(0, -1) = (0, 0)$$

これより、 $a=c, b=d$

また、 $a+b+c+d=6$ であるから、

(a, b, c, d) の組は

$$(a, b, c, d) = (3, 0, 3, 0), (0, 3, 0, 3), (1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 1)$$

の 4 通りである。

$(a, b, c, d) = (3, 0, 3, 0)$ となる確率は

$$\left\{{}_6C_3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3\right\} \times \left\{{}_3C_3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3\right\} = \frac{5}{4^5}$$

対称性より、 $(a, b, c, d) = (0, 3, 0, 3)$ となる確率も $\frac{5}{4^5}$

$(a, b, c, d) = (1, 2, 1, 2)$ となる確率は

$$\left\{6 \times \left(\frac{1}{4}\right)\right\} \times \left\{{}_5C_2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2\right\} \times \left\{{}_3C_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)\right\} \times \left\{{}_2C_2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2\right\} = \frac{45}{4^5}$$

同様に、 $(a, b, c, d) = (2, 1, 2, 1)$ となる確率も $\frac{45}{4^5}$

これらを合計して、求める確率は

$$2 \times \left(\frac{5}{4^5} + \frac{45}{4^5}\right) = \frac{25}{256} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。

[解答 2]

点 P が 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある事象を A とすると、

$$P(A) = \frac{5}{16}$$

点 P が 6 秒後に直線 $y=-x$ 上にある事象を B とすると、同様に

$$P(B) = \frac{5}{16}$$

P の x 座標を s 、 y 座標を t とすると、

$s-t$ は、[解答 1] の①～④において、それぞれ $+1, -1, -1, +1$ だけ増減する。

このとき、「 $+1$ 」と「 -1 」はそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で起きる。

$s+t$ は、①～④において、それぞれ $+1, +1, -1, -1$ だけ増減する。

このとき、「 $+1$ 」と「 -1 」はそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で起きる。

$s-t$ で「 $+1$ 」となる事象を C 、 $s+t$ で「 $+1$ 」となる事象を D とすると、

$$P_C(D) = \frac{1}{2}, \quad P(D) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{なので、} \quad P_C(D) = P(D) \quad \text{となり、}$$

C と D は独立な事象である。

よって、

「 C がちょうど 3 回起こる」という事象 A と

「 D がちょうど 3 回起こる」という事象 B は

独立である。

ゆえに、 $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{25}{256}$ となる。

6 秒後に点 P が原点 O にいるのは、事象 A 、事象 B が同時に起こるときであるから、

求める確率は

$$P(A \cap B) = \frac{25}{256} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。

第3問

$$w = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{w}$$

(1) z は L 上の点であるから,

$$\begin{aligned} |z - \alpha| &= |z| \\ \left| \frac{1}{w} - \alpha \right| &= \left| \frac{1}{w} \right| \\ |1 - \alpha w| &= 1, \quad w \neq 0 \\ \therefore \left| w - \frac{1}{\alpha} \right| &= \left| \frac{1}{\alpha} \right|, \quad w \neq 0 \end{aligned}$$

以上より, 求めるものは, 中心 $\frac{1}{\alpha}$, 半径 $\left| \frac{1}{\alpha} \right|$ (答)

(2) 点 z が β と β^2 を結ぶ線分上にあるための条件は

$$\begin{cases} |z+1| = |z| & \text{.....①} \\ \frac{2}{3}\pi \leq \arg z \leq \frac{4}{3}\pi & \text{.....②} \end{cases}$$

である.

$z = \frac{1}{w}$ であるから, ①より

$$\left| \frac{1}{w} + 1 \right| = \left| \frac{1}{w} \right|$$

$$\therefore |1+w| = 1 \quad \text{かつ} \quad w \neq 0 \quad \text{.....③}$$

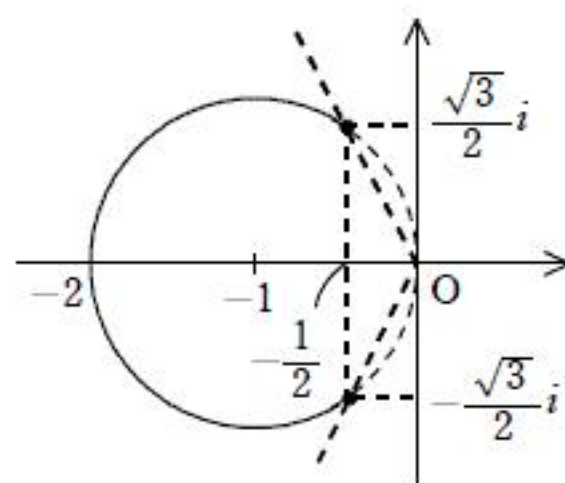
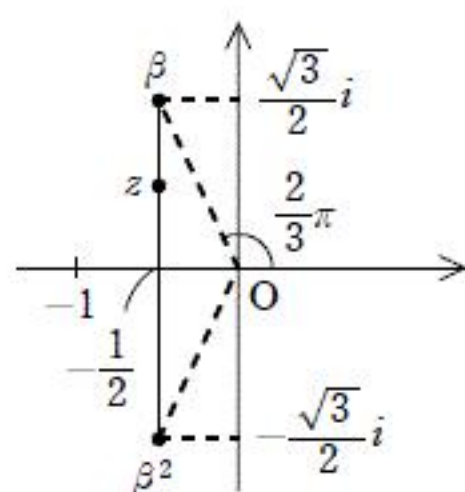
また,

$$\arg z = \arg \frac{1}{w} = -\arg w$$

であるから, ②より

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\pi &\leq -\arg w \leq \frac{4}{3}\pi \\ \therefore -\frac{2}{3}\pi &\leq \arg w \leq -\frac{4}{3}\pi & \text{.....④} \end{aligned}$$

以上, ③, ④より w の軌跡は右図のような円弧である.



(注)

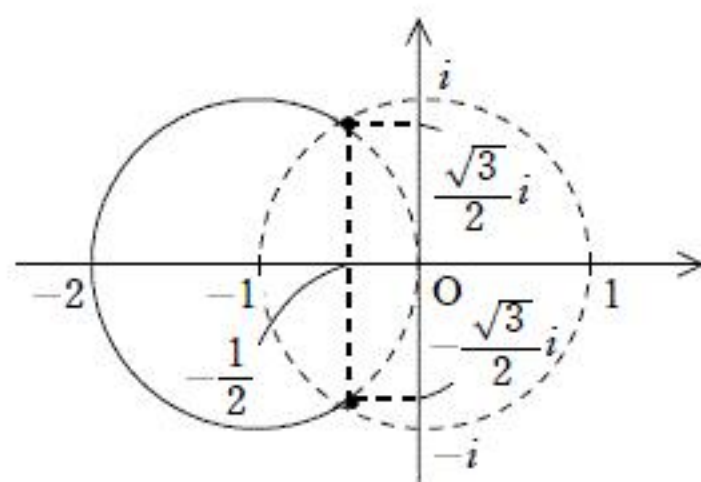
①, ②のかわりに

$$\begin{cases} |z+1| = |z| & \text{.....①'} \\ |z| \leq 1 & \text{.....②'} \end{cases}$$

を用いると,

$$\begin{cases} |1+w| = 1 \quad \text{かつ} \quad w \neq 0 \\ |w| \geq 1 \end{cases}$$

となる.



第4問

$$(1) \quad \begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_2 &= 18 \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad \begin{aligned} a_1 a_n &= \left\{ p + \left(-\frac{1}{p} \right) \right\} \left\{ p^n + \left(-\frac{1}{p} \right)^n \right\} \\ &= p^{n+1} + \left(-\frac{1}{p} \right)^{n+1} - \left\{ p^{n-1} + \left(-\frac{1}{p} \right)^{n-1} \right\} \\ &= a_{n+1} - a_{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) 数学的帰納法で示す.

(i) a_1, a_2 は自然数.

(ii) $k=2, 3, \dots\dots$ について, $a_1, \dots\dots, a_k$ がすべて自然数のとき,

(2)より $a_{k+1} = a_{k-1} + 4a_k$ と表せるため, a_{k+1} も自然数.

(i), (ii) より, a_n は自然数であることが示された.

(4) $k=2, 3, \dots\dots$ のとき, $4a_k + a_{k-1} (= a_{k+1})$ と a_k の最大公約数は,

a_{k-1} と a_k の最大公約数に等しい.

これを繰り返し用いることで, a_{n+1} と a_n の最大公約数は

a_2 と a_1 の最大公約数に等しいことがわかる.

$a_1 = 2 \cdot 2, a_2 = 2 \cdot 9$ より, 求めるものは 2 \dots\dots(\text{答}) である.

第5問

(1) 直線 $l: y = ax + b$ は C と接するので、 $x^2 - ax + k - b = 0$ は重解をもつ.

よって、判別式 $= 0$ より

$$a^2 - 4(k - b) = 0$$

$$\therefore b = k - \frac{1}{4}a^2 \quad \dots\dots ①$$

l と D は接するので、 $a \neq 0$ であり、 $l: x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$ と表せるから

$$y^2 - \frac{1}{a}y + k + \frac{b}{a} = 0 \text{ は重解をもつ.}$$

よって、同様にして

$$\frac{1}{a^2} - 4\left(k + \frac{b}{a}\right) = 0$$

$$\therefore 1 - 4a^2k - 4ab = 0 \quad \dots\dots ②$$

①を②に代入して、

$$1 - 4a^2k - 4a\left(k - \frac{1}{4}a^2\right) = 0$$

$$4a(a+1)k = (a+1)(a^2 - a + 1) \quad \dots\dots ③$$

$a \neq -1, 0$ なので、

$$k = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4} + \frac{1}{4a} \quad \dots\dots ④ \text{ (答)}$$

①に代入して、

$$b = -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a - \frac{1}{4} + \frac{1}{4a} \quad \dots\dots \text{(答)}$$

(2) ④に $a = 2$ を代入して、

$$k = \frac{3}{8}$$

このとき、④より

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4} + \frac{1}{4a}$$

$$2a^2 - 5a + 2 = 0$$

$$(2a - 1)(a - 2) = 0$$

$$a = 2, \frac{1}{2}$$

$$a = 2 \text{ のとき, ①より } b = -\frac{5}{8}$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ のとき, ①より } b = \frac{5}{16}$$

一方、 $a = -1$ のとき③は常に成り立つ.

$$a = -1 \text{ と } k = \frac{3}{8} \text{ を①に代入して, } b = \frac{1}{8}$$

以上より、共通接線は3本存在する.

また、

$$\left(\begin{array}{c} \text{傾き} \\ y \text{ 切片} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 2 \\ -\frac{5}{8} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{16} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ \frac{1}{8} \end{array} \right) \quad \dots\dots \text{(答)}$$

第 6 問

(1) $P(x, y, z)$ とすると,

$$OP=1 \text{ より } x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$PQ=1 \text{ より } x^2+y^2+(z-1)^2=1 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

①−②より,

$$z=\frac{1}{2}$$

よって, 点 P は

$$x^2+y^2=\frac{3}{4} \quad \text{かつ} \quad z=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

を満たして動く. したがって, x 座標の範囲は,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

また,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \vec{OA} \cdot \vec{OP} \\ &= x \end{aligned}$$

であるから, θ の範囲は

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

より,

$$30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2) 円③上の各点と原点を結ぶ線分全体が作る円錐面を S とする.

立体 K は円錐面 S を x 軸のまわりに 1 回転した回転体である.

円錐面 S の 1 つの母線 OP に注目し, OP を x 軸のまわりに 1 回転すると,

$\angle AOP = \theta$ を頂角とする円錐となる. (図 2)

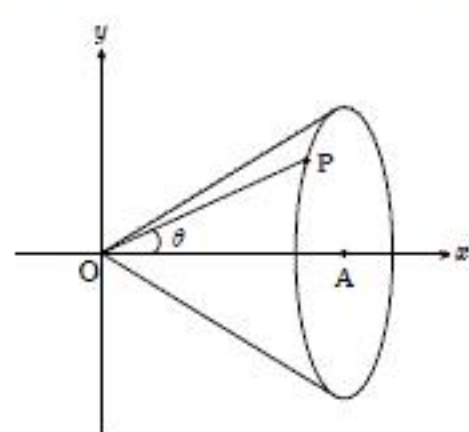


図2

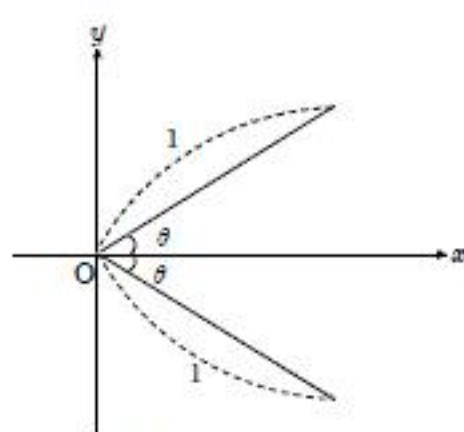


図3

この円錐と xy 平面の交線は, 図 3 のような線分である.

そこで P を動かすと, θ は $30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$ の範囲を動くので,

K と xy 平面の交わりは, 図 4 のような 2 つの扇形である.

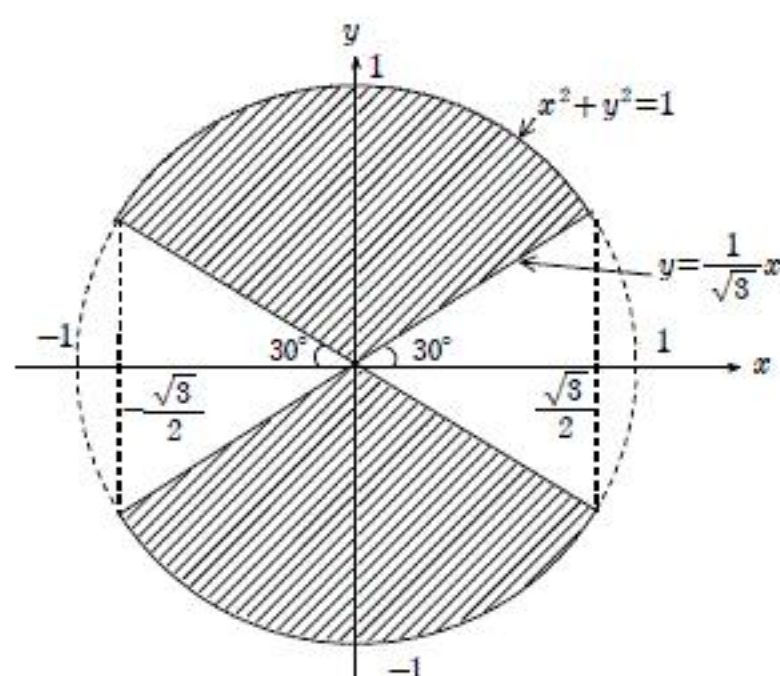


図4

よって, 立体 K は図 4 の領域を x 軸のまわりに 1 回転したものである.

したがって, 求める体積は,

$$\begin{aligned} \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(1 - x^2 - \frac{x^2}{3} \right) dx &= \frac{4}{3} \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x \right) dx \\ &= \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{1}{6} \cdot (\sqrt{3})^3 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である.