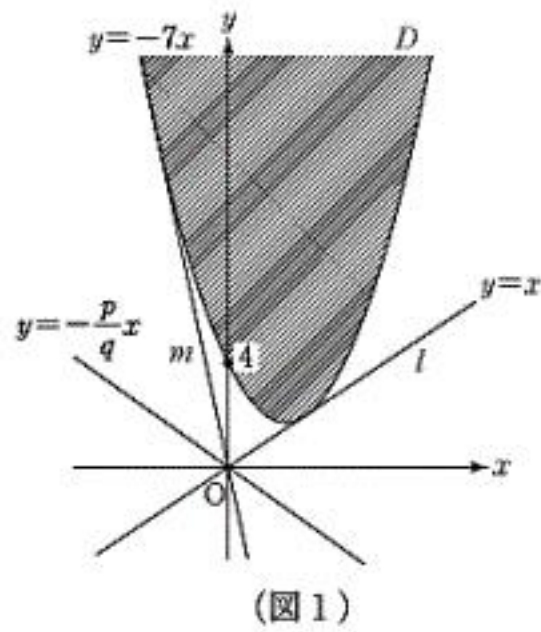


第1問

(1) まず、放物線 $y=x^2-3x+4$ の原点 O を通る接線 $y=ax$ を求める。
 $x^2-3x+4=ax$ が重解をもつことより、
 $x^2-(3+a)x+4=0$ の判別式 $=0$ であるから、
 $(3+a)^2-4\cdot 4=0 \quad \therefore a=1, -7$
そこで、 $l:y=x$, $m:y=-7x$ とおく。
 $C:y=f(x)$ 上の点 A の座標を $(t, f(t))$ とおくと、
 $L=\frac{|-t+f(t)|}{\sqrt{1+1}}=\frac{(t-2)^2}{\sqrt{2}}, M=\frac{|7t+f(t)|}{\sqrt{1+7^2}}=\frac{(t+2)^2}{5\sqrt{2}}$
よって、
 $\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{|t-2|}{\sqrt{2}}+\frac{|t+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|t-2|+\frac{|t+2|}{\sqrt{5}}\right)$
である。ここで、
 $g(t)=|t-2|+\frac{|t+2|}{\sqrt{5}}$
とおくと、 $\sqrt{2}>0$ より、 $\sqrt{L}+\sqrt{M}$ が最小となる t は、 $g(t)$ が最小となる t と一致する。
(i) $t\geq 2$ のとき
 $g(t)=t-2+\frac{t+2}{\sqrt{5}}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)t+\frac{2}{\sqrt{5}}-2$
(ii) $-2\leq t\leq 2$ のとき
 $g(t)=2-t+\frac{t+2}{\sqrt{5}}=\left(-1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)t+2+\frac{2}{\sqrt{5}}$
(iii) $t\leq -2$ のとき
 $g(t)=2-t+\frac{-2-t}{\sqrt{5}}=\left(-1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)t+2-\frac{2}{\sqrt{5}}$
これらはすべて t の1次関数であり、グラフ(半直線と線分)の傾きは、 $t<2$ ($t\neq -2$) では負、 $t>2$ では正であるから、 $g(t)$ の最小値を与える t は、 $t=2$
このとき、 $f(2)=2$ よって、 $A(2, 2)$ (答) である。

(2) 「 $(x, y)\in D \implies px+qy\leq 0$ ①」(*)

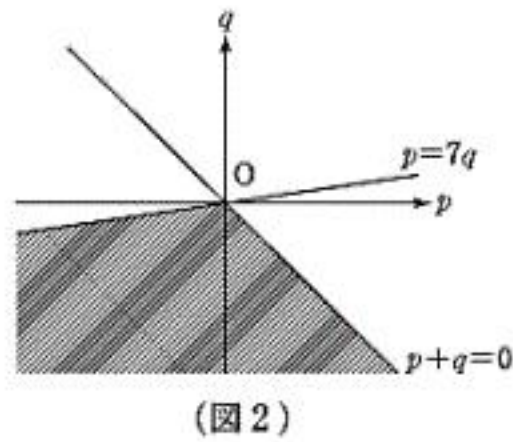
(i) $q=0$ のとき、
① $\iff px\leq 0$
であり、 D には $x>0$ なる点と、 $x<0$ なる点が存在するので、
(*)の成立条件は、 $p=0$ である。
(ii) $q\neq 0$ のとき、 D 内の1点 $(0, 4)$ でも①が成立することより、
 $4q\leq 0$
よって、 $q<0$ であることが必要。
このとき、①は、
 $y\geq -\frac{p}{q}x$ ②
と変形される。



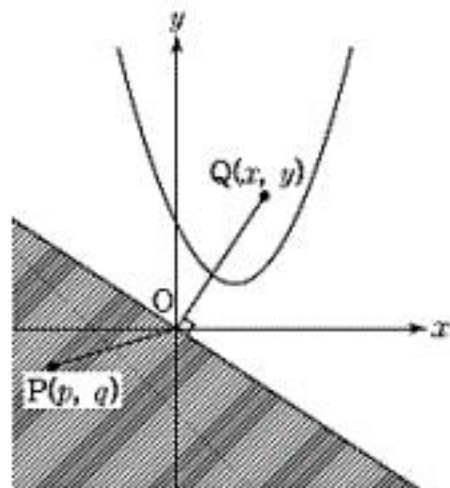
したがって、(*)の成立条件は、図1より、

$$\begin{aligned} -7 &\leq -\frac{p}{q} \leq 1 \\ \iff 7q &\leq p \leq -q \end{aligned}$$

である。
(i), (ii)を合わせて、求める範囲は図2の斜線部。ただし、境界線も含む。



(注) $Q(x, y)$ とする。ある $Q(x, y)\in D$ に対して、
 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=px+qy\leq 0$
 $\iff P=O$ または $\angle POQ\geq 90^\circ$
となる P の存在範囲は次図の斜線部になる。



そこで、 Q を動かして P の存在範囲の共通部分をとると、 Q が l, m の接点の場合に限界を与えて、同じ結果を得る。

第2問

$$(1) \quad a_7 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^2} = \frac{143}{210} < 1$$

$$(2) \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^3} \cdot \frac{\{(n-1)!\}^3}{(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{n^3} = \frac{4n-2}{n^2}$$

より,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 &\iff n^2 - 4n + 2 > 0 \\ &\iff (n-2)^2 > 2 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$n \geq 2$ のとき, ①の左辺は n の増加列である. したがって,

$$\begin{cases} (3-2)^2 = 1 < 2 \\ (4-2)^2 = 4 > 2 \end{cases}$$

より, ①を満たす n の範囲は,

$$n \geq 4 \quad \dots\dots (\text{答}) \quad \text{となる.}$$

(3) (1), (2)より, $n \geq 7$ のとき,

$$a_n \leq a_7 < 1$$

よって, $n \leq 6$ が必要である.

ここで,

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = \frac{10}{3}$$

$$a_4 = \frac{35}{12}$$

$$a_5 = \frac{10C_5}{5!}, \quad a_6 = \frac{12C_6}{6!} \quad \text{はいずれも分母が5の倍数であり, 分子が5の倍数でないので, 整数とはならない.}$$

ゆえに, 求める $n \geq 1$ は,

$$n = 1, 2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

第3問

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$

$x \geq 1$ で $f(x)$ が単調に増加する条件は、 $x \geq 1$ で $f'(x) \geq 0$ となることである。

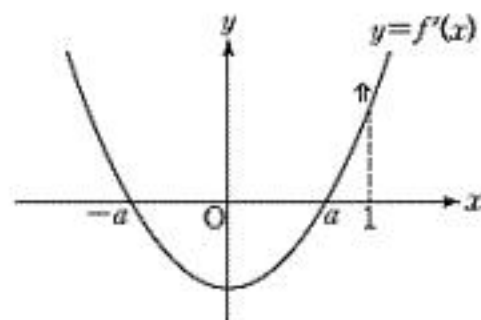
一方、 $y = f'(x)$ のグラフは右のようになるので、求める a の条件は、

$$f'(1) = 3(1-a^2) \geq 0$$

$a > 0$ ゆえ、

$$0 < a \leq 1$$

……(答) となる。



(2)

x		$-a$		a	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

上の増減表より、 $y = f(x)$ のグラフは右のようになる。

方程式 $f(x) = b$ の解は $y = f(x)$ と $y = b$ のグラフの共有点の x 座標に等しい。

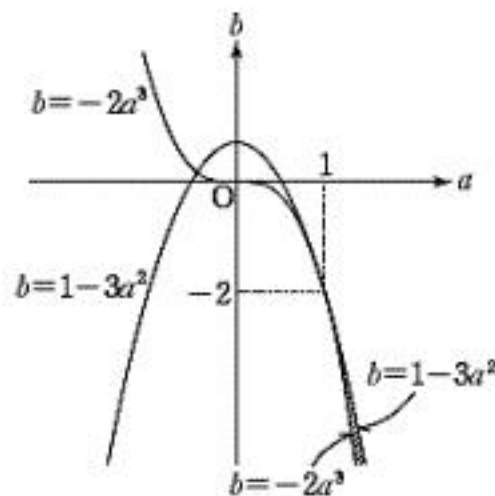
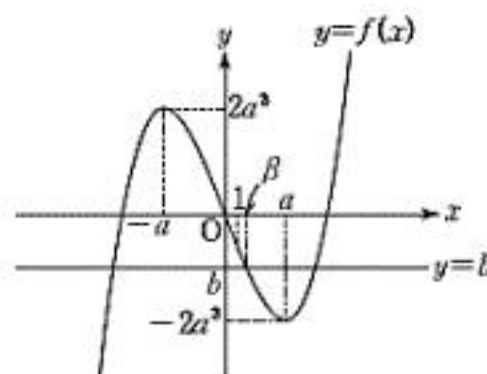
条件1は、 $-2a^3 < b < 2a^3$ と同値である。

条件2は、条件1の下で、 $a > 1$ かつ $f(a) < b < f(1)$ と同値である。

よって、求める条件は、

$$\begin{cases} a > 1 \\ -2a^3 < b < 1 - 3a^2 \end{cases}$$

であり、これを図示すると、下図斜線部(境界は含まない)となる。



第4問

(1) $P(p, p^2)$ とおくと、

$-1 \leq p \leq 1$ ①

であり、 $Q(x, y)$ は

$\begin{cases} x=2p & \text{.....②} \\ y=2p^2 & \text{.....③} \end{cases}$ と表される.

よって、②を用いて、③、①から p を消去すれば、

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 & \text{.....④} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$

を得る. すなわち、点 Q の軌跡は、放物線弧 ④(答) である.

(2) $R(r, 0)$ とおくと、

$0 \leq r \leq 1$ ⑤

であり、 $S(x, y)$ は

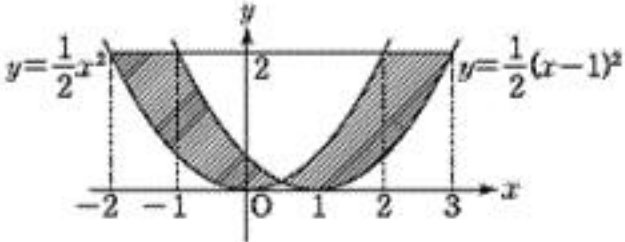
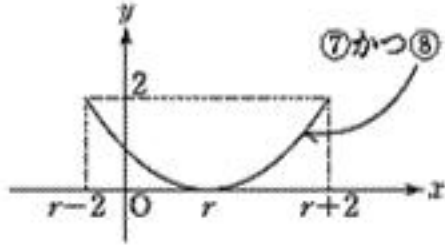
$\begin{cases} x=2p+r & \text{.....⑥} \\ y=2p^2 & \text{.....⑦} \end{cases}$ と表される.

まず、⑥を用いて、⑦、⑤から p を消去すれば、

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}(x-r)^2 & \text{.....⑧} \\ r-2 \leq x \leq r+2 \end{cases}$

これは放物線弧を表し、⑧のグラフの軸： $x=r$ が区間⑦の真ん中であることに注意する.

そこで、 r を⑤の範囲で動かすと、 S の動く領域は下図の斜線部および網目部(境界含む).



よって、求める面積を T とすると、

$T = \text{[shaded area]} + \text{[shaded area]} - \text{[shaded area]} \dots\dots\dots⑨$

ここで、 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ のグラフは $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものであるから、

⑨の第 1 項の面積は、

$\text{[shaded area]} = \text{[rectangle]} = 1 \cdot 2 = 2$

となる. 第 2 項は対称性により第 1 項と等しいので、

$T = 2 \cdot 2 - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} x^2 dx = 4 - \frac{1}{24} = \frac{95}{24} \dots\dots\dots(\text{答})$

である.

(注) (2)では(1)の結果を利用することもできる. つまり、 $R(r, 0)$ を固定すると、(1)で求めた④を x 軸方向に r だけ平行移動したもの(⑧かつ⑦)になる. 次に、 r を動かすことにより最終結果が得られる.