

第1問

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} - \sin x \\ &= \frac{\sin x - x \cos x - \sin^3 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x(1 - \sin^2 x) - x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x \cos^2 x - x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x(\sin x \cos x - x)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

ここで, $g(x) = \sin x \cos x - x = \frac{1}{2} \sin 2x - x$ とおくと, $0 < x < \pi$ において,

$$g'(x) = \cos 2x - 1 < 0$$

より, $g(x)$ は減少し, しかも

$$g(0) = 0$$

であるので, $0 < x < \pi$ において, $g(x) < 0$

したがって, $f'(x)$ は $-\cos x$ と同符号となり, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

.....(答)

また,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = \infty \end{cases} \quad \text{.....(答)}$$

である.

第2問

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\frac{2n+1}{n!} C_n}{\frac{2n-1}{(n-1)!} C_{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n(2n+1)}{n(n+1)} \\
 &= \frac{2n+1}{n(n+1)}
 \end{aligned}$$

ここで、一般に、 a, b, x, y が整数のとき、

$$ax + by = 1$$

を満たすならば、 x と y は互いに素であることに注意すると、

$\frac{n(n+1)}{2}$ は整数であり、

$$(2n+1) \cdot (2n+1) - 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1$$

が成り立つので、2つの自然数 $2n+1$ と $\frac{n(n+1)}{2}$ は互いに素である。

よって、求めるものは、

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad q_n = 2n+1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。

(2) $a_1=3, a_2=5, a_3=\frac{35}{6}$ である。 $n \geq 4$ のとき、 a_n が整数でないことを示す。まず、

$$n \geq 4 \text{ のとき, } \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

実際、 $n > 0$ のとき、

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \iff 2(2n+1) < n(n+1) \iff n(n-3) > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$n \geq 4$ のとき、②の左辺は n の増加列であり、

$$4 \cdot 1 = 4 > 2$$

であるから、②は $n \geq 4$ で成立する。

a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 を求めると、

$$a_4 = a_3 \cdot \frac{q_4}{p_4} = \frac{21}{4}$$

$$a_5 = a_4 \cdot \frac{q_5}{p_5} = \frac{77}{20}$$

$$a_6 = a_5 \cdot \frac{q_6}{p_6} = \frac{143}{60}$$

$$a_7 = a_6 \cdot \frac{q_7}{p_7} = \frac{143}{112}$$

$$a_8 = a_7 \cdot \frac{q_8}{p_8} = \frac{2431}{4032} < 1$$

よって、①より、

$$a_n < 1 \quad (n \geq 8)$$

以上により、求める $n \geq 1$ は、

$$n=1, 2 \quad \cdots \cdots (\text{答}) \quad \text{である。}$$

第3問

$P(p, p^2)$, $Q(q, 0)$ とおくと,

$$-1 \leq p \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$0 \leq q \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

であり, $R(x, y)$ は

$$\begin{cases} x = \frac{p}{k} + kq & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ y = \frac{p^2}{k} & \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases} \quad \text{と表される.}$$

まず, ③を用いて, ④, ①から p を消去すると,

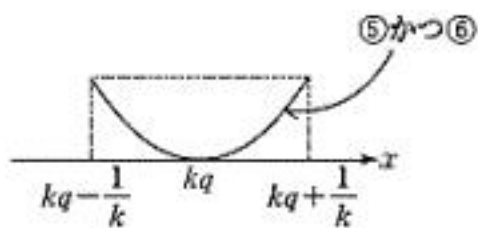
$$y = k(x - kq)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$kq - \frac{1}{k} \leq x \leq kq + \frac{1}{k} \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

これは右図のような放物線弧を表す.

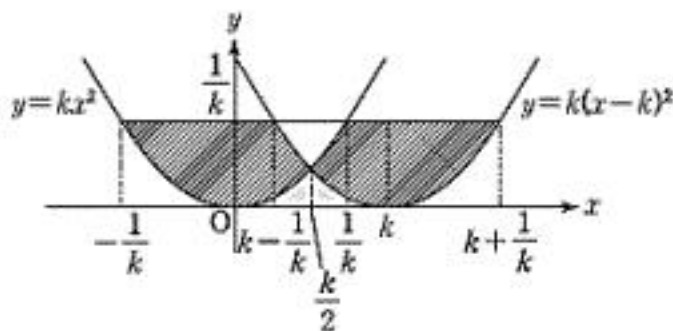
⑤のグラフの軸: $x = kq$ が区間⑥の真ん中であることに注意する.

そこで, q を②の範囲で動かす.



(i) $\frac{1}{k} > k - \frac{1}{k}$, すなわち, $0 < k < \sqrt{2}$ のとき

点 R は図の斜線部および網目部を動く. ただし, 境界も含む.



よって, 求める面積は,



ここで, $y = k(x - k)^2$ のグラフは $y = kx^2$ のグラフを x 軸方向に k だけ平行移動したものであるから,

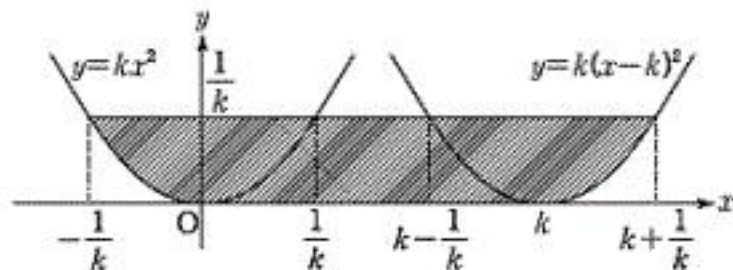
$$\text{[Shaded Region]} = \text{[Rectangle]} \cdot \frac{1}{k} = k \cdot \frac{1}{k} = 1$$

よって,

$$\begin{aligned} S(k) &= 1 \cdot 2 - 2 \int_0^{\frac{k}{2}} kx^2 dx \\ &= 2 - \frac{k^4}{12} \end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{k} \leq k - \frac{1}{k}$, すなわち, $\sqrt{2} \leq k$ のとき,

点 R は図の斜線部を動く. ただし, 境界も含む.



よって, 求める面積は,



として,

$$S(k) = \frac{1}{k} \left(k + \frac{2}{k} \right) - 2 \int_0^{\frac{1}{k}} kx^2 dx = 1 + \frac{4}{3k^2}$$

以上, (i), (ii)より,

$$S(k) = \begin{cases} 2 - \frac{k^4}{12} & (0 < k < \sqrt{2}) \\ 1 + \frac{4}{3k^2} & (k \geq \sqrt{2}) \end{cases} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

となるので,

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow +0} S(k) = 2 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = 1 \end{cases} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

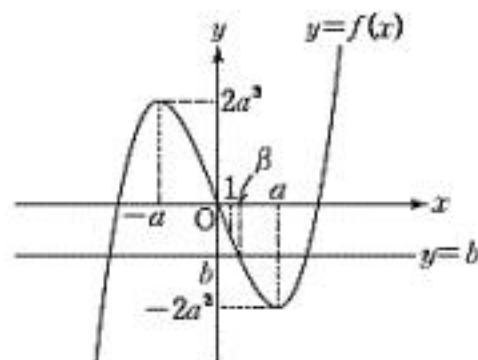
を得る.

第4問

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

$a > 0$ より、増減表は次のようになる。

x		$-a$		a	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$2a^3$	↘	$-2a^3$	↗



これより、 $y = f(x)$ のグラフは右のようになる。

方程式 $f(x) = b$ の解は $y = f(x)$ と $y = b$ のグラフの共有点の x 座標に等しい。

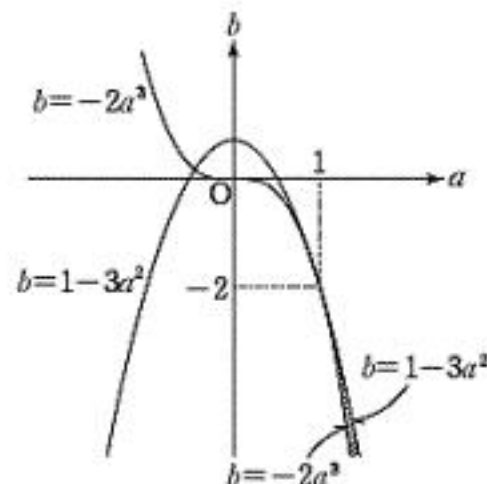
条件1は、 $-2a^3 < b < 2a^3$ と同値である。

条件2は、条件1の下で、 $a > 1$ かつ $f(a) < b < f(1)$ と同値である。

よって、求める条件は、

$$\begin{cases} a > 1 \\ -2a^3 < b < 1 - 3a^2 \end{cases}$$

であり、これを図示すると、下図斜線部(境界は含まない)となる。



第5問

(1) xy 平面で $P(\cos\theta, \sin\theta)$ とおくと,

点 P での円 C の接線は $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$

これと A との距離を d とすると,

$$d = \frac{|1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta - 1|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} \\ = 1 - \cos\theta$$

ここで, 単位円 $|z|=1$ 上の点 $P(z)$ に対して,

$$\bar{z} = \frac{1}{z}, \quad \cos\theta = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

であることに注意すると,

$$u = 1 + 2dz \\ = 1 + 2\left(1 - \frac{z + \bar{z}}{2}\right)z \\ = 1 + \left(2 - z - \frac{1}{z}\right)z \\ = -z^2 + 2z \quad \dots\dots(\text{答})$$

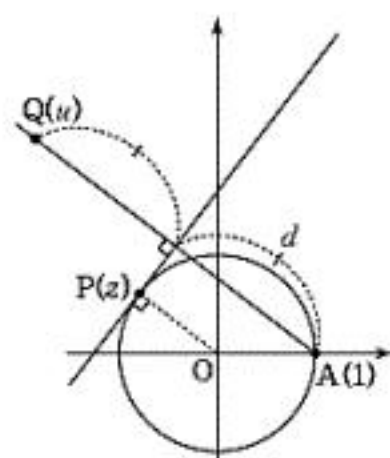
$$\therefore \begin{cases} w = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-(-z^2+2z)} = \frac{1}{(z-1)^2} \quad \dots\dots\textcircled{1} \\ \bar{w} = \frac{1}{(\bar{z}-1)^2} = \frac{1}{(\bar{z}-1)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2} = \frac{z^2}{(1-z)^2} \end{cases}$$

$$\text{これより, } \frac{\bar{w}}{w} = z^2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

よって,

$$\frac{w + \bar{w} - 1}{w} = 1 + \frac{\bar{w}}{w} - \frac{1}{w} \\ = 1 + z^2 - (z-1)^2 \\ = 2z$$

$$\therefore \frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|} = \left| \frac{w + \bar{w} - 1}{w} \right| = 2|z| = 2 \quad \dots\dots\textcircled{2}(\text{答})$$



(2) ②より,

$$|w + \bar{w} - 1| = 2|w|$$

$w = x + yi$ とおくと,

$$|2x - 1| = 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots\dots\textcircled{3}$$

$$\therefore x = -y^2 + \frac{1}{4} \quad \dots\dots\textcircled{4}$$

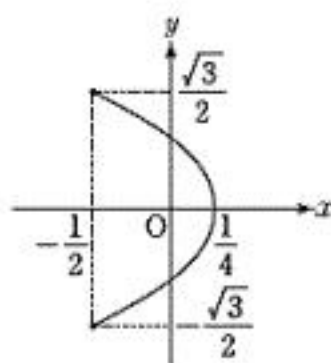
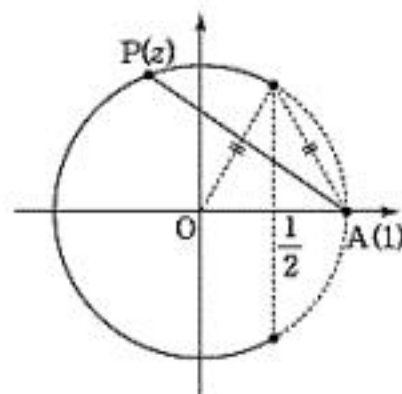
また,

$$\begin{aligned} (z \text{ の実部}) \leq \frac{1}{2} &\iff |z - 1| \geq 1 \\ &\iff |w| \leq 1 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &\iff \left| \frac{2x - 1}{2} \right| \leq 1 \quad (\because \textcircled{3}) \\ &\iff -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \quad \dots\dots\textcircled{5} \end{aligned}$$

よって, 求める軌跡は,

放物線弧 ④かつ⑤(答)

であり, 図示すると下図のようになる.

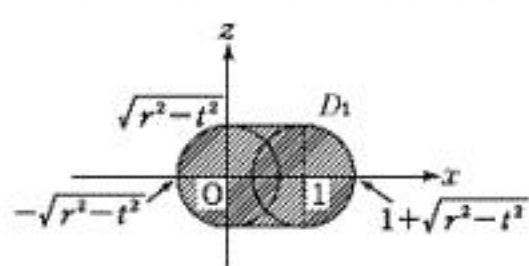


第6問

(1) V_1 の平面 $y=t$ ……① による切り口は $r^2-t^2 \geq 0$ のときに存在し、球 (内部を含む) $x^2+y^2+z^2 \leq r^2$ の平面①による切り口である円 (内部を含む)

$$x^2+z^2 \leq r^2-t^2 \quad \text{……②}$$

が動いてできる下のような図形 D_1 である。

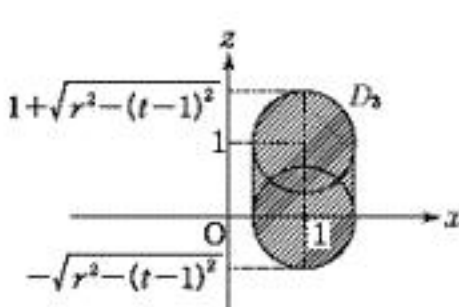


同様に、 V_3 の平面①による切り口は $r^2-(t-1)^2 \geq 0$ のときに存在し、球 (内部を含む)

$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2 \leq r^2$ の平面①による切り口である円 (内部を含む)

$$(x-1)^2+z^2 \leq r^2-(t-1)^2 \quad \text{……③}$$

が動いてできる次のような図形 D_3 である。



平面 $y=t$ が V_1, V_3 双方と共有点をもつ条件は、2つの図形 D_1, D_3 がともに存在することであり (このとき $(1, t, 0) \in D_1 \cap D_3$)、その条件は、

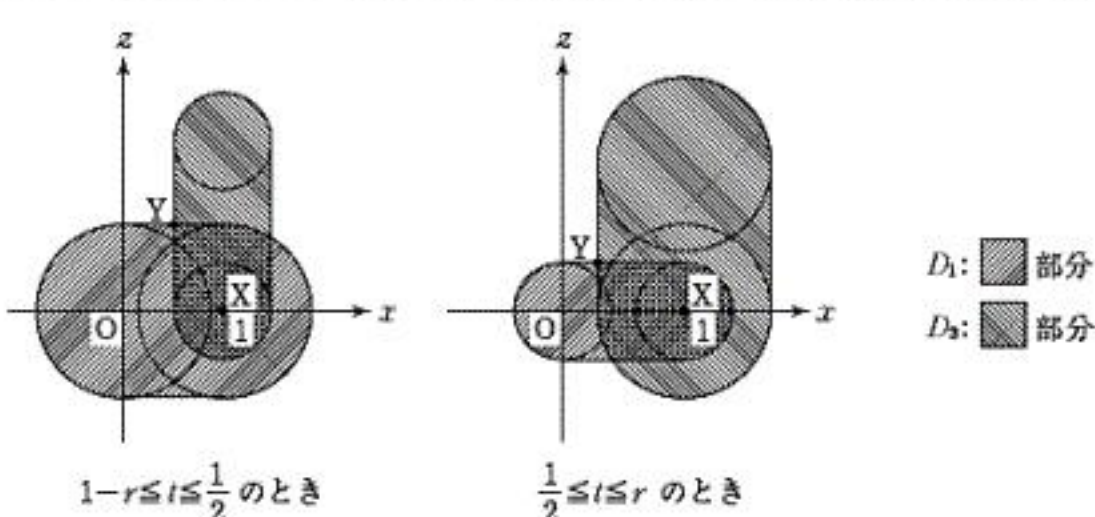
$$\begin{cases} r^2-t^2 \geq 0 \\ r^2-(t-1)^2 \geq 0 \end{cases} \quad \therefore 1-r \leq t \leq r \quad \text{……④(答)}$$

である。条件 $\frac{1}{2} < r < 1$ の下で④は t の区間を定め、かつ円②、③の半径は1より小さい。

さらに、

$$r^2-t^2 \geq r^2-(t-1)^2 \iff t \leq \frac{1}{2}$$

であるので、④の下に、 D_1, D_3 を同一平面上に図示すると次図のようになる。



(2) ④の範囲の t について、

$$(V_1 \cap V_3 \text{ の切り口}) \subset (V_2 \text{ の切り口}) \quad \text{……⑤}$$

が成り立てばよい。

V_2 の平面①による切り口は、(1)の図の点 $X(1, t, 0)$ を中心とする半径 r の円である。

$V_1 \cap V_3$ の切り口は(1)の図の二重斜線部分であり、このうち、点 X から最も離れているのは点 $Y(1-\sqrt{r^2-(t-1)^2}, t, \sqrt{r^2-t^2})$ である。

$$\textcircled{5} \iff XY \leq r \quad \text{……⑥}$$

ここで、

$$XY^2 = \{r^2-(t-1)^2\} + (r^2-t^2) = 2r^2-2t^2+2t-1$$

$$\therefore \textcircled{6} \iff 2r^2-2t^2+2t-1 \leq r^2 \iff r^2 \leq 2t^2-2t+1$$

そこで、 $f(t) = 2t^2-2t+1 = 2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ とおき、④の範囲の t に対して $r^2 \leq f(t)$ となる条件を調べる。

$\frac{1}{2} < r < 1$ より、 $1-r < \frac{1}{2} < r$ であるから $f(t)$ の軸は④の範囲にあり、 $f(t)$ の④の範囲における最小値は

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ である。}$$

$$\text{よって、} r^2 \leq \frac{1}{2} \text{ と } \frac{1}{2} < r < 1 \text{ から、} \frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{……(答) を得る。}$$

(3) V_1 の体積を $|V_1|$ と表すことにすると、

$$|V_1 \cup V_2 \cup V_3| = |V_1| + |V_2| + |V_3| - |V_1 \cap V_2| - |V_2 \cap V_3| - |V_3 \cap V_1| + |V_1 \cap V_2 \cap V_3| \quad \text{……⑦}$$

ここで、

$$|V_1| = |V_2| = |V_3| = S, \quad |V_1 \cap V_2| = |V_2 \cap V_3| = T$$

また、 $V_1 \cap V_3 \subset V_2$ より、 $V_1 \cap V_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3$

$$\therefore |V_1 \cap V_3| = |V_1 \cap V_2 \cap V_3|$$

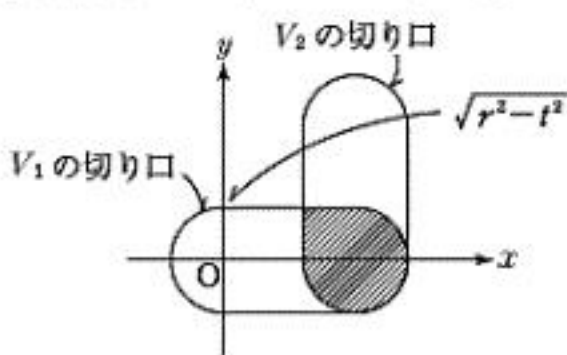
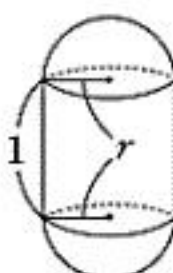
以上を⑦に代入して、 $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ の体積は、

$$3S - 2T \quad \text{……(答) となる。}$$

(4) 右図より、

$$S = \pi r^2 \times 1 + \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 + \pi r^2 \quad \text{……⑧}$$

$V_1 \cap V_2$ を平面 $z=t$ ($-r \leq t \leq r$) で切ると、切り口は次図斜線部分となる。



その面積は、

$$\square + \frown$$

$$= (r^2-t^2) + \pi(r^2-t^2) \times \frac{3}{4}$$

$$= \left(1 + \frac{3}{4}\pi\right)(r^2-t^2)$$

したがって、

$$T = \int_{-r}^r \left(1 + \frac{3}{4}\pi\right)(r^2-t^2) dt$$

$$= \left(1 + \frac{3}{4}\pi\right) \times \frac{1}{6} (2r)^3 = \left(\frac{4}{3} + \pi\right) r^3 \quad \text{……⑨}$$

ゆえに、⑧、⑨と(3)より、求める体積は

$$(4\pi r^3 + 3\pi r^2) - \left(\frac{8}{3} + 2\pi\right) r^3 = \left(2\pi - \frac{8}{3}\right) r^3 + 3\pi r^2 \quad \text{……(答)}$$

となる。