

入 学 試 験 問 題

数 学(理科)



(配点 120 点)

平成 30 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号(表面 2 箇所、裏面 1 箇所)、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり、 $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow \pi - 0$ のときの極限を調べよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

数列 $a_1, a_2, \dots$ を

$$a_n = \frac{{}^{2n+1}C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。

- (1) $n \geq 2$ とする。 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\frac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geq 1$ と分子 q_n を求めよ。
- (2) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $A(1, 0)$ を考える。 $k > 0$ を実数とする。点 P が C 上を動き、点 Q が線分 OA 上を動くとき、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{k} \overrightarrow{OP} + k \overrightarrow{OQ}$$

をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。

$S(k)$ および $\lim_{k \rightarrow +0} S(k)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

$a > 0$ とし,

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。次の2条件をみたす点 (a, b) の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる3実数解をもつ。

条件2：さらに、方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $P(z)$ は C 上にあり、点 $A(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して、点 A と対称な点を $Q(u)$ とする。 $w = \frac{1}{1-u}$ とおき、 w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) u と $\frac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し、絶対値の商 $\frac{|w + \overline{w} - 1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) C のうち実部が $\frac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $P(z)$ が C' 上を動くときの点 $R(w)$ の軌跡を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

座標空間内の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ を考える。

$\frac{1}{2} < r < 1$ とする。点 P が線分 OA , AB , BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球（内部を含む）が通過する部分を、それぞれ V_1 , V_2 , V_3 とする。

- (1) 平面 $y = t$ が V_1 , V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ。さらに、この範囲の t に対し、平面 $y = t$ と V_1 の共通部分および、平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。
- (2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ。
- (3) r は(2)の条件をみたすとする。 V_1 の体積を S とし、 V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする。 V_1 , V_2 , V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ。
- (4) ひきつづき r は(2)の条件をみたすとする。 S と T を求め、 V の体積を決定せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)