

第1問

$$(1) \quad 0 < p \leq 1, \quad 0 < q \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$(\triangle OPQ \text{の面積}) = \frac{1}{3} \text{ となる条件は}$$

$$pq = \frac{2}{3} \quad \therefore q = \frac{2}{3p} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } (\triangle PQR \text{の面積}) = \frac{1}{3} \text{ となる条件は, } \textcircled{1} \text{ の下で,}$$

$$\frac{1}{2}(1-q)r + \frac{1}{2}(1-p+1-r) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore p + qr = \frac{4}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

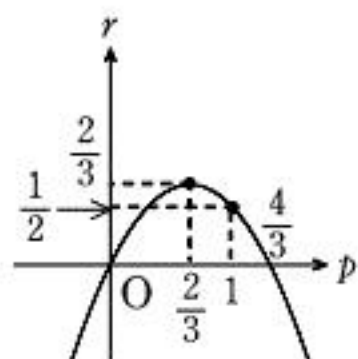
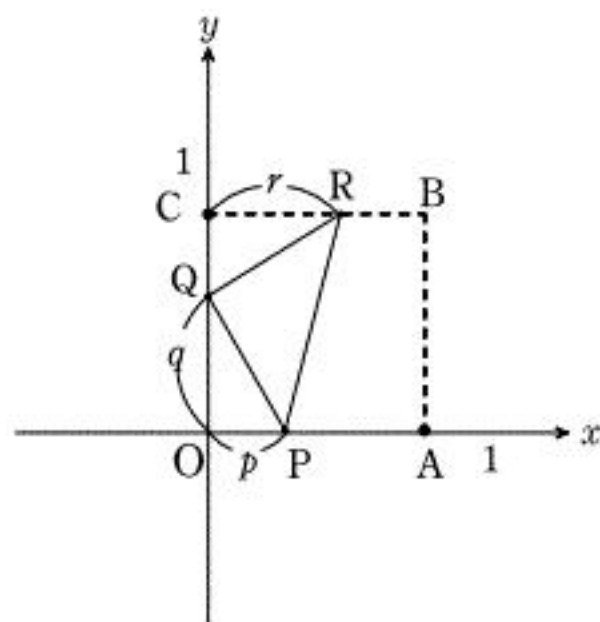
$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入し } q \text{ を消去すると, } p^2 - \frac{4}{3}p + \frac{2}{3}r = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{また, } 0 < q = \frac{2}{3p} \leq 1 \iff (1 \geq) p \geq \frac{2}{3}$$

$$\text{また, } \textcircled{3} \iff r = -\frac{3}{2}\left(p^2 - \frac{4}{3}p\right)$$

$$\frac{2}{3} \leq p \leq 1 \text{ と右図より } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{2}{3} \text{ また } \textcircled{1} \text{ より } \frac{2}{3} \leq q \leq 1$$

$$\text{以上より, } \frac{2}{3} \leq p \leq 1, \frac{2}{3} \leq q \leq 1, \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$



$$(2) \quad \frac{CR}{OQ} = \frac{r}{q} = -\frac{9}{4}p^2\left(p - \frac{4}{3}\right) = f(p) \text{ とおく.}$$

$$f'(p) = -\frac{27}{4}p^2 + 6p = -\frac{27}{4}p\left(p - \frac{8}{9}\right)$$

$$\text{右表および } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad f(1) = \frac{3}{4}, \quad f\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{64}{81}$$

より, $f(p)$ は

$$p = \frac{2}{3} \text{ で最小値 } \frac{2}{3} \quad p = \frac{8}{9} \text{ で最大値 } \frac{64}{81} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

をとる.

p	$\frac{2}{3}$		$\frac{8}{9}$		1
$f'(p)$		+	0	-	
$f(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

第2問

(1) まず、条件1より、

$$8 \leq (2, 2) \cdot (p, q) \leq 17$$

$$\iff 8 \leq 2p + 2q \leq 17$$

$$\iff q \geq -p + 4 \text{ かつ } q \leq -p + \frac{17}{2} \dots\dots ①$$

また、 l の方程式は $x + y - 4 = 0$ なので、

$$c = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$d = \frac{|p + q - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{p + q - 4}{\sqrt{2}} \quad [\because ①]$$

よって、条件2より、

$$cd \geq (p-1)^2 \iff 2(p+q-4) \geq p^2 - 2p + 1$$

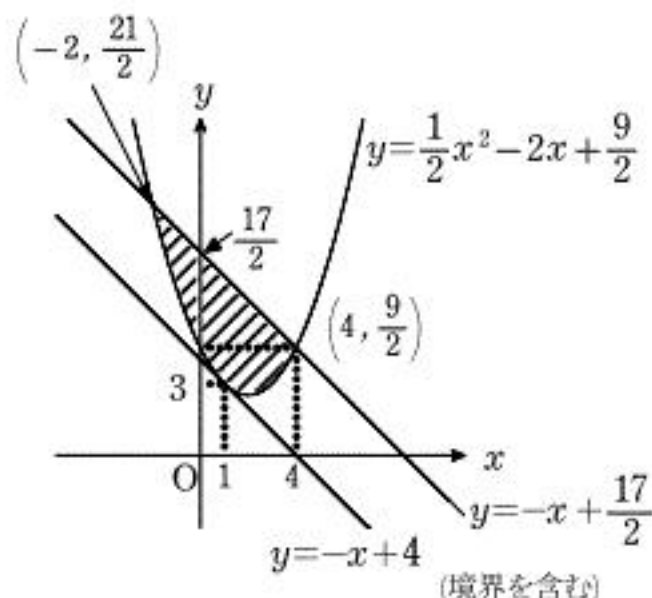
$$\iff q \geq \frac{1}{2}p^2 - 2p + \frac{9}{2} \dots\dots ②$$

①、②より、 D は下図の斜線部である。

また、 D の面積は

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^4 \left(-x + \frac{17}{2} - \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{9}{2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-2}^4 (x+2)(x-4) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6^3}{6} = 18 \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

である。



(2) 原点を通り、 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$ に接する直線の方程式を $y = kx$ (k は実数)とおくと、2次方程式

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} = kx \iff x^2 - 2(2+k)x + 9 = 0$$

について、

$$\begin{aligned} D' = \frac{D}{4} = 4 + 4k + k^2 - 9 = 0 & \iff (k+5)(k-1) = 0 \\ & \iff k = -5, 1 \end{aligned}$$

$y = -5x$, $y = x$ と $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$ との接点はそれぞれ $(-3, 15)$, $(3, 3)$ である。

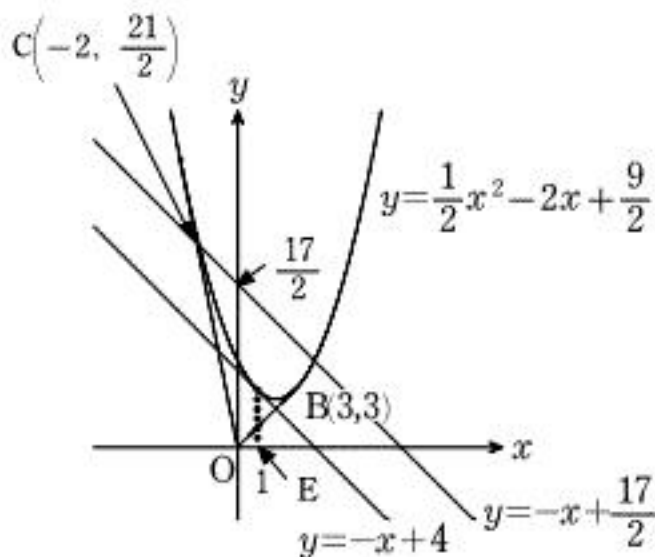
これと(1)より、 $B(3, 3)$, $C(-2, \frac{21}{2})$ とすると、

$\angle EOB \leq \theta \leq \angle EOC$ であるから、

$\cos \theta$ のとりうる値の範囲は、

$$-\frac{4}{\sqrt{457}} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots (\text{答})$$

である。



第3問

- (1) (表が出た回数)-(裏が出た回数)が8の倍数となることが必要十分条件なので、

事象Sは以下の3つの場合が考えられる、

(i)表が5回、裏が5回

(ii)表が9回、裏が1回

(iii)表が1回、裏が9回

確率はそれぞれ

$$(i) \cdots \cdots {}_{10}C_5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{252}{2^{10}}$$

$$(ii), (iii) \cdots \cdots {}_{10}C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{10}{2^{10}}$$

より、求める確率は

$$\frac{252}{2^{10}} + \frac{10}{2^{10}} + \frac{10}{2^{10}} = \frac{17}{64} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である、

- (2) 事象Sが起こり、かつ事象Tが起こらない確率を求める、

5回の操作後の点Pの位置として点B, D, Hが考えられるが、それぞれの確率は

(点B)……表が3回、裏が2回(このとき、Fを通らない)

$${}_5C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{2^5}$$

(点D)……表が4回、裏が1回(このとき、Fを通らない)

$${}_5C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{2^5}$$

(点H)……表が2回、裏が3回(ただし、最初に裏が3回連続して出る場合を除く)

$$({}_5C_2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{9}{2^5}$$

残りの5回ではこれと反対のことが起こればよいので、合わせた確率は

$$\left(\frac{10}{2^5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2^5}\right)^2 + \left(\frac{9}{2^5}\right)^2 = \frac{103}{512}$$

となる、したがって、求める確率は

$$\frac{17}{64} - \frac{103}{512} = \frac{33}{512} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

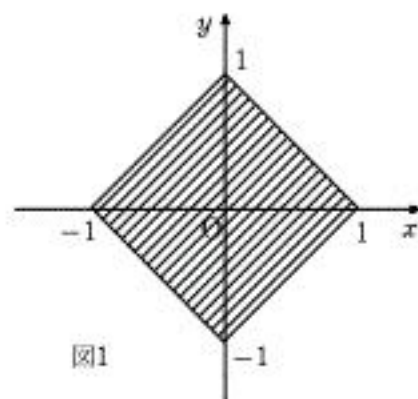
である、

第4問

(1) $D: |x| + |y| \leq 1$

D は x 軸, y 軸対称であり, $x, y \geq 0$ のとき $x + y \leq 1$ を表す.

よって, D は図1 斜線部分 (境界含む)

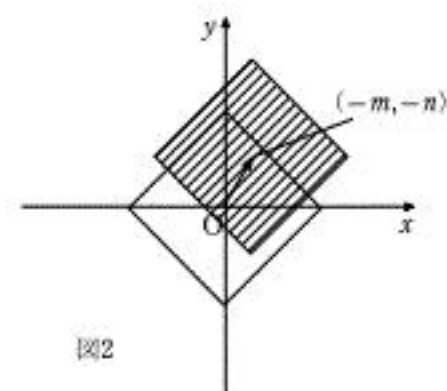


$Q(m, n)$ ($|m| + |n| \leq 1$) を固定すると

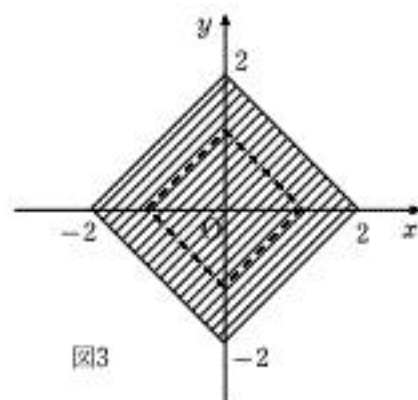
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \quad (P \text{ は } D \text{ 上を動く}) \text{ なる点 } R \text{ の集合は}$$

図形 D をベクトル $-\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ だけ平行移動したものであり,

図2 の斜線部分 (境界含む)



Q を動かしてこれを集めれば E は図3 の斜線部分 (境界含む)



(2) 点 $A(a, b)$ をとり

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS'}, \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OT'}$$

とすると, S, T が F 上を動くとき,

S', T' は D 上を動く,

また,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OU} &= \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OT} \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OS'}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OT'}) \\ &= \overrightarrow{OS'} - \overrightarrow{OT'} \end{aligned}$$

であるから, U の動く範囲は E である.

よって, G は E と一致する.