

第1問

$x = \tan t$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$ より, 与えられた定積分は,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 t + \sin t) (1 + \sin t \cos^2 t) \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin t + \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) \left(\sin t + \frac{1}{\cos^2 t} \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \left(\sin t + \frac{1}{\cos^2 t} \right)^2 - \left(\sin t + \frac{1}{\cos^2 t} \right) \right\} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \left(\sin^2 t + \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^4 t} \right) - \left(\sin t + \frac{1}{\cos^2 t} \right) \right\} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) + \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} + (\tan^2 t + 1) \cdot \frac{1}{\cos^2 t} - \sin t - \frac{1}{\cos^2 t} \right\} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} + \tan^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} - \sin t \right\} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t + 2 \cdot \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{3} \tan^3 t + \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + 2\sqrt{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (2 + 1) \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{35}{12} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

となる.

(注) 被積分関数を展開すると,

$$x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \quad \dots\dots ①$$

となり, 第2項と第3項を通分し, 計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{x(1+x^2) + x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} &= \frac{2x^3 + x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2x(1+x^2) - x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{cases} \left(\sqrt{1+x^2} \right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

であるので, ②の第1項, 第2項の原始関数が分かる.

したがって, ①の第4項の積分においてだけに

$x = \tan t$ なる置換を施せばよいことになる.

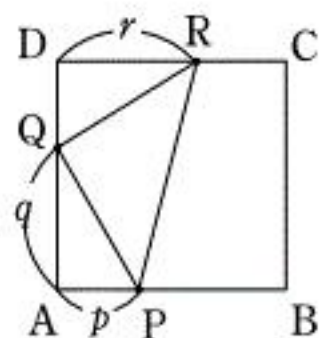
また, ①の第3項では,

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)'$$

と考えて, 部分積分を実行する手もある.

第2問

$AP = p$, $AQ = q$, $DR = r$ とおく. $(0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1, 0 \leq r \leq 1)$.



$(\triangle APQ \text{の面積}) = \frac{1}{3}$ となる条件は

$$pq = \frac{2}{3} \quad \therefore q = \frac{2}{3p} \quad \dots\dots ①$$

また, $(\triangle PQR \text{の面積}) = \frac{1}{3}$ となる条件は, ①の下で,

$$\frac{1}{2}(1-q)r + \frac{1}{2}(1-p+1-r) = \frac{1}{3}$$

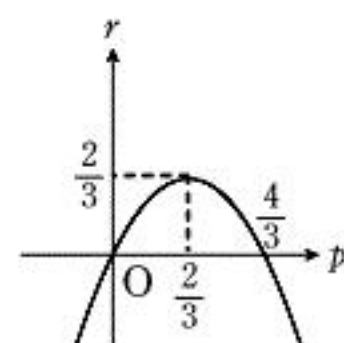
$$\therefore p + qr = \frac{4}{3} \quad \dots\dots ②$$

①を②に代入し q を消去すると, $p^2 - \frac{4}{3}p + \frac{2}{3}r = 0 \quad \dots\dots ③$

また, $0 < q = \frac{2}{3p} \leq 1 \Leftrightarrow (1 \geq) p \geq \frac{2}{3} \quad \dots\dots ④$

また, ③ $\Leftrightarrow r = -\frac{3}{2}\left(p^2 - \frac{4}{3}p\right)$

右図より, r は $0 \leq r \leq 1$ を満たす. よって, 右図と④より, $\frac{2}{3} \leq p \leq 1$



$$\frac{DR}{AQ} = \frac{r}{q} = \frac{-\frac{3}{2}\left(p^2 - \frac{4}{3}p\right)}{\frac{2}{3p}} = -\frac{9}{4}p^2\left(p - \frac{4}{3}\right) = f(p)$$

とおく.

$$f'(p) = -\frac{27}{4}p^2 + 6p$$

$f'(p) = 0$ とすると, $p = 0, \frac{8}{9}$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \quad f(1) = \frac{3}{4} \quad f\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{64}{81}$$

よって,

$$p = \frac{2}{3} \text{で最小値 } \frac{2}{3} \quad p = \frac{8}{9} \text{で最大値 } \frac{64}{81} \text{ をとる.} \dots\dots (\text{答})$$

p	$\frac{2}{3}$		$\frac{8}{9}$		1
$f'(p)$		+	0	-	
$f(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

第3問

(1) 八面体 $PABCDE$ の $y=0$ による切り口は、四角形 $PCAE$ となる。一方、平面 α の $y=0$ による切り口は、

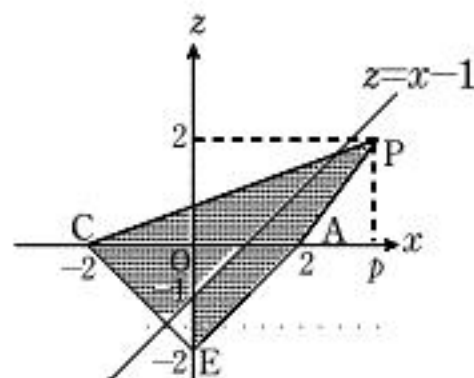
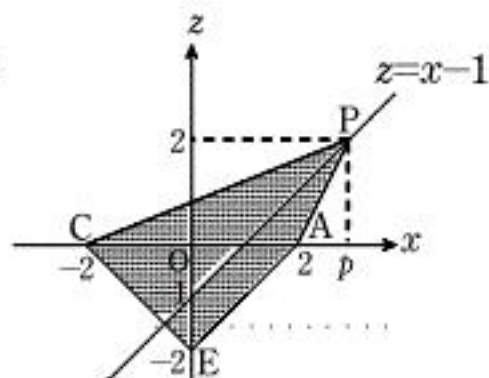
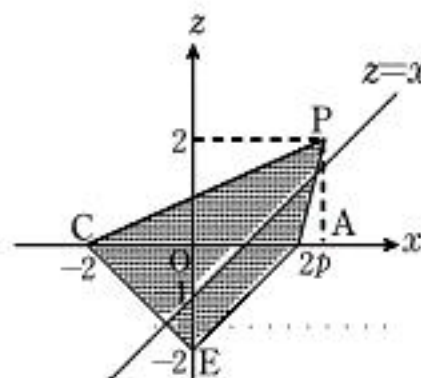
xz 平面上において MN の中点 $(1, 0)$ を通る傾き 1 の直線 $z=x-1$ となる。

よって、下図(i), (ii), (iii)において、八面体 $PABCDE$ の $y=0$ による切り口は網目部、平面 α の $y=0$ による切り口は 直線 $z=x-1$ 。

(i) $2 < p < 3$ のとき

(ii) $p=3$ のとき

(iii) $3 < p < 4$ のとき



(2) 八面体 $PABCDE$ のうち点 A, E が平面 α について同じ側に、点 C, B, D がそれと逆の側にある。

よって、辺 EC, EB, ED, AB, AD が平面 α と交点をもつ。

さらに、(1)の図において、(ii)のときは点 P が平面 α 上にあり、(i)のとき辺 PA が、(iii)のとき辺 PB, PC, PD が平面 α と交点をもつ。よって、八面体 $PABCDE$ の平面 α による切り口は、(i), (ii)のとき六角形に、(iii)のとき八角形になる。

したがって、求める条件は $3 < p < 4$ 。

(3) 平面 α の方程式は、 MN が y 軸と平行であることと 2 点 $(1, 0, 0), (0, 0, -1)$ を通ることから、

$$x - z = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、八面体 $PABCDE$ の平面 α による切り口のうち $y \geq 0, z \geq 0$ の部分は、 AC と平面 α の交点 Q , PC と平面 α の交点 R , PB と平面 α の交点 S , AB と平面 α の交点 M を頂点にもつ。

ここで、 $Q(1, 0, 0)$ である。一方、 $P(p, 0, 2), C(-2, 0, 0)$ より、直線 PC は $y=0, z = \frac{2}{p+2}x + \frac{4}{p+2}$ 。

これと①より R の z 座標は $\frac{6}{p}$ 。

さらに、 $P(p, 0, 2), B(0, 2, 0)$ より、 $S(\beta, \gamma, \delta)$ は

$$\begin{cases} \beta - \gamma = 1 & (\because \textcircled{1}) \\ -\gamma = \delta - 2 \\ -p\gamma = 2(\beta - p) \end{cases}$$

をみたす。

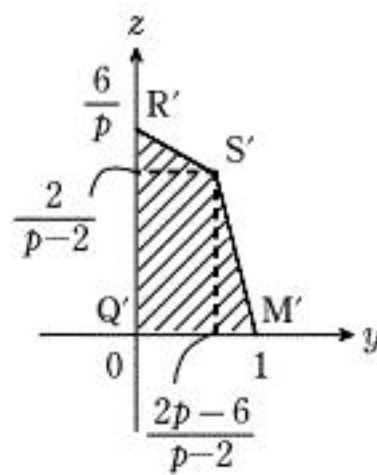
これを解いて、 $\gamma = \frac{2p-6}{p-2}, \delta = \frac{2}{p-2}$

よって、 Q, R, S, M を yz 平面上に射影した点をそれぞれ

Q', R', S', M' として、右図の四角形 $Q'R'S'M'$ の面積を求めて、

(四角形 $Q'R'S'M'$) $= \triangle Q'R'S' + \triangle Q'M'S'$

$$\begin{aligned} &= \frac{6(p-3)}{p(p-2)} + \frac{1}{p-2} \\ &= \frac{7p-18}{p(p-2)} \end{aligned}$$



第4問

(1) $5n^2 + 9 - 5(n^2 + 1) = 4$ より, d_n は 4 の約数であるから,

$$d_n = 1 \quad \text{または} \quad 2 \quad \text{または} \quad 4$$

(i) $n = 2k$ のとき (k は正の整数)

$$\begin{cases} n^2 + 1 = 4k^2 + 1 \\ 5n^2 + 9 = 4(5k^2 + 2) + 1 \end{cases}$$

$$\therefore d_n = 1$$

(ii) $n = 2k - 1$ のとき (k は正の整数)

$$n^2 + 1 = 4(k^2 - k) + 2$$

$$5n^2 + 9 = 5(4k^2 - 4k + 1) + 9$$

$$= 4(5k^2 - 5k + 3) + 2$$

$$\therefore d_n = 2$$

(2)(i) $n = 2k$ のとき, $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ は互いに素で, $n^2 + 1$ は平方数でない.

実際, $n^2 + 1 = l^2$ ($l > n$) とすると,

$$(l + n)(l - n) = 1$$

$$\therefore l + n = l - n = 1$$

これは, $l + n > l - n$ に反する.

よって, $n^2 + 1$ はある素因数 p を奇数個もっており, $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ は互いに素なの

で, $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ の素因数 p の個数も奇数となり, $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ も平方数ではない.

(ii) $n = 2k - 1$ のとき, (1)より

$$n^2 + 1 = 2a_n, 5n^2 + 9 = 2b_n$$

とおける. ただし, a_n と b_n は互いに素な奇数である. ここで,

$$b_n = 2(5k^2 - 5k + 3) + 1$$

$$= 5(2k^2 - 2k + 1) + 2$$

整数 m を 5 で割った余りに対して, m^2 を 5 で割った余りは次表のようになる.

m	m^2
0	0
± 1	1
± 2	4

ゆえに, b_n は平方数ではない. したがって, (i)と同様に $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ も平方数ではない.

以上, (i), (ii)より, $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ は平方数ではない.

第5問

(1) $x^{2n-1} = \cos x \quad \dots\dots ①$

(ア) ①のとき $|x^{2n-1}| = |\cos x| \leq 1$ より $|x|^{2n-1} \leq 1 \quad \therefore |x| \leq 1$ であるが,

$-1 \leq x < 0$ のとき $x^{2n-1} < 0$ かつ $\cos x > 0 \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} < x < 0 \right)$ より, ①は成り立たない.

以上より, $x < 0$ または $1 < x$ のとき, x は①の解とならない.

(イ) 次に, $0 \leq x \leq 1$ のとき $f(x) = x^{2n-1} - \cos x$ とおくと

$$f'(x) = (2n-1)x^{2n-2} + \sin x > 0 \quad (0 < x \leq 1) \text{ より,}$$

$$f(x) \text{ は単調増加であり, } f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 - \cos 1 > 0$$

よって, $f(x) = 0$ は $0 < x < 1$ の範囲にただ1つの実数解をもつ.

(ア), (イ)より, ①はただ1つの実数解をもつ. ■

(2) (1)の過程から $0 < a_n < 1 \left(< \frac{\pi}{2} \right)$ であるから, $\cos a_n > \cos 1$ である. ■

(3)(i) (2)より $(0 <) \cos 1 < \cos a_n < 1$ であるから,

$$a_n^{2n-1} = \cos a_n \quad \dots\dots ②$$

より,

$$(0 <) \cos 1 < a_n^{2n-1} < 1$$

$$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} < a_n < 1$$

$0 < \cos 1 < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} = 1$ であるから,

はさみうちの原理より $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(ii) ②より $a_n^{2n} = a_n \cos a_n \quad \therefore a_n^n = \sqrt{a_n \cos a_n} \quad (\because a_n > 0, \cos a_n > 0 \text{ より, } a_n \cos a_n > 0)$

よって(i)より, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n \cos a_n} = \sqrt{\cos 1}$

(iii) (i), (ii)より $\frac{a_n^n - b}{a_n - a} = \frac{a_n^n - \sqrt{\cos 1}}{a_n - 1} = \frac{\sqrt{a_n \cos a_n} - \sqrt{\cos 1}}{a_n - 1}$

$g(x) = \sqrt{x \cos x}$ とおくと, $\frac{a_n^n - b}{a_n - a} = \frac{g(a_n) - g(1)}{a_n - 1}$ と表せて,

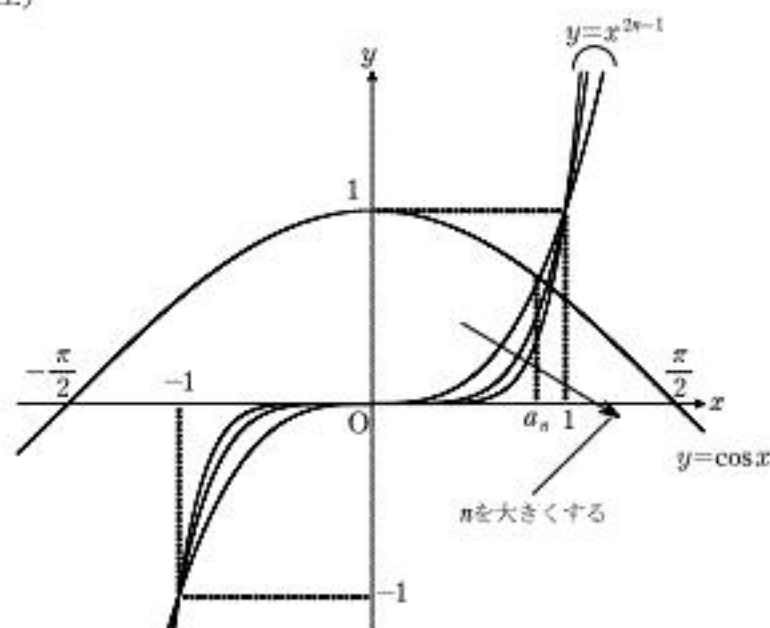
$$\begin{cases} n \rightarrow \infty \text{ のとき, } a_n \rightarrow 1 \\ g'(x) = \frac{(x \cos x)'}{2\sqrt{x \cos x}} = \frac{\cos x - x \sin x}{2\sqrt{x \cos x}} \end{cases}$$

ゆえに,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - 1} = g'(1) = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$$

以上より, $a = 1, b = \sqrt{\cos 1}, c = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}} \quad \dots\dots (\text{答})$

(注)



グラフをみると,

$$a_n \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることが直観的に理解できる.

第 6 問

(1) 条件 2 の 4 次方程式は実数係数より、複素数解 α を持つならば、 $\bar{\alpha}$ も解となる。

したがって、解として

$$\begin{cases} \text{(i)} & \text{全て実数解} \\ \text{(ii)} & \text{1 組の共役虚数解と 2 実数解} \\ \text{(iii)} & \text{2 組の共役虚数解} \end{cases}$$

が考えられる。

(i) のとき

$$\alpha\beta + \gamma\delta = (\text{実数}) \text{ となり、条件 3 に反する。}$$

(iii) のとき

$$\text{(a)} \begin{cases} \gamma = \bar{\alpha} \\ \delta = \bar{\beta} \end{cases} \text{ のとき, } \begin{aligned} \alpha\beta + \gamma\delta &= \alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta} \\ &= \alpha\beta + \overline{\alpha\beta} \\ &= (\text{実数}) \end{aligned} \text{ となり、条件 3 に反する。}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} \beta = \bar{\alpha} \\ \delta = \bar{\gamma} \end{cases} \text{ のとき, } \begin{aligned} \alpha\beta + \gamma\delta &= \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} \\ &= (\text{実数}) \end{aligned} \text{ となり、条件 3 に反する。}$$

以上より、(ii) が必要。

(2) (ii) のうち、 $\beta = \bar{\alpha}$ のとき

$$\alpha\beta + \gamma\delta = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\delta = (\text{実数})$$

となり、条件 3 に反する。

したがって、 $\gamma = \bar{\alpha}$ としてよい。

$$\text{このとき, } \begin{cases} \beta, \delta \text{ は実数} \\ \alpha, \gamma \text{ は虚数} \end{cases} \text{ である。}$$

$A = \alpha + \bar{\alpha}$, $B = \beta + \delta$, $C = |\alpha|^2$, $D = \beta\delta$ とおくと、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} A + B = 2 & \cdots \cdots \text{①} \\ C + BA + D = 0 & \cdots \cdots \text{②} \\ BC + DA = 2a & \cdots \cdots \text{③} \\ DC = b & \cdots \cdots \text{④} \end{cases}$$

また、条件 3 より、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha\beta + \gamma\delta) &= \operatorname{Re}(\alpha)\beta + \operatorname{Re}(\gamma)\delta = \frac{1}{2}AB = 0 \\ \operatorname{Im}(\alpha\beta + \gamma\delta) &= \operatorname{Im}(\alpha)(\beta - \delta) \neq 0 \quad \operatorname{Im}(\alpha) \neq 0 \text{ かつ } \beta \neq \delta \end{aligned}$$

(I) $A = 0$ のとき、①～④は

$$\begin{cases} B = 2 \\ C + D = 0 \\ BC = 2a \\ DC = b \end{cases}$$

$$\therefore b = -a^2$$

(II) $B = 0$ のとき、①～④は

$$\begin{cases} A = 2 \\ C + D = 0 \\ DA = 2a \\ DC = b \end{cases}$$

$$\therefore b = -a^2$$

したがって、 $b = -a^2$ …… (答)

(3)(I) のとき

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 2 \\ C = a \\ D = -a \end{cases}$$

$\alpha, \bar{\alpha}$ は、 $x^2 + a = 0$ の解より、 $a > 0$, $x = \pm\sqrt{a}i$

β, δ は、 $x^2 - 2x - a = 0$ の解より、

$$1 + a > 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{1 + a}$$

$$\alpha + \beta = \pm\sqrt{a}i + 1 \pm \sqrt{1 + a}$$

$a > 0$ が条件。

$$\begin{cases} a > 0 \\ x = 1 \pm \sqrt{1 + a} \\ y = \pm\sqrt{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (x - 1)^2 = 1 + a \\ y^2 = a \end{cases}$$

このような a が存在する条件は、

$$\begin{cases} (x - 1)^2 = 1 + y^2 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

(II) のとき

$$\begin{cases} B = 0 \\ A = 2 \\ D = a \\ C = -a \end{cases}$$

$\alpha, \bar{\alpha}$ は、 $x^2 - 2x - a = 0$ の解より、

$$1 + a < 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{-a - 1}i$$

β, δ は、 $x^2 + a = 0$ の解より、

$$a < 0, \quad x = \pm\sqrt{-a}$$

$$\alpha + \beta = 1 \pm \sqrt{-a - 1}i \pm \sqrt{-a}$$

$a < -1$ が条件。

$$\begin{cases} a < -1 \\ x = 1 \pm \sqrt{-a} \\ y = \pm\sqrt{-a - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ (x - 1)^2 = -a \\ y^2 = -a - 1 \end{cases}$$

このような a が存在する条件は、

$$\begin{cases} y^2 = (x - 1)^2 - 1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

(I), (II) のどちらの場合でも、双曲線 $(x - 1)^2 - y^2 = 1$ から、 $(2, 0)$, $(0, 0)$ を除いたもの。…… (答)

