

〔Ⅰ〕

(1)

点 X は辺 BC 上を $m:n$ に内分する点であることから,

$$BX = \frac{m}{m+n}a$$

$$XC = \frac{n}{m+n}a$$

が得られる。

$$(答) \quad BX = \frac{m}{m+n}a, \quad XC = \frac{n}{m+n}a$$

(2)

$\triangle AXC$ について余弦定理を用いると,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{AX^2 + CX^2 - AC^2}{2AX \cdot CX} \\ &= \frac{(p^2 - b^2)(m+n)^2 + n^2 a^2}{2pna(m+n)} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(答) \quad \cos \theta = \frac{(p^2 - b^2)(m+n)^2 + n^2 a^2}{2pna(m+n)}$$

(3)

$\triangle AXB$ について余弦定理を用いて,

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= \frac{AX^2 + BX^2 - AB^2}{2AX \cdot BX} \\ &= \frac{(p^2 - c^2)(m+n)^2 + m^2 a^2}{2pma(m+n)} \end{aligned}$$

となる。また, $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ であるから,

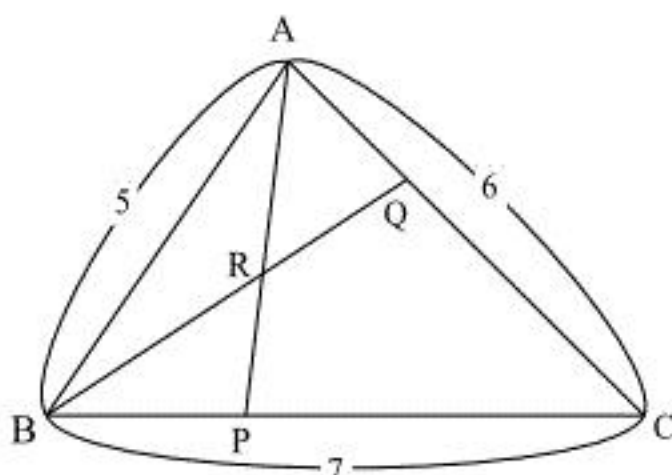
$$\begin{aligned} \frac{(p^2 - c^2)(m+n)^2 + m^2 a^2}{2pma(m+n)} &= -\frac{(p^2 - b^2)(m+n)^2 + n^2 a^2}{2pna(m+n)} \\ \Leftrightarrow \left\{ (p^2 - c^2)(m+n)^2 + m^2 a^2 \right\} n &= -\left\{ (p^2 - b^2)(m+n)^2 + n^2 a^2 \right\} m \\ \Leftrightarrow p^2 + \frac{mn}{(m+n)^2} a^2 &= \frac{m}{m+n} b^2 + \frac{n}{m+n} c^2 \end{aligned}$$

が導かれる。

(証明終)

(4)

図示すると以下の図のようになる。



(3)の式において, $a=6, b=5, c=7, m=2, n=1$ において求められる p がここでの BQ と一致する。これらを代入すると,

$$\begin{aligned} BQ^2 + \frac{2}{(1+2)^2} \cdot 6^2 &= \frac{2}{1+2} \cdot 5^2 + \frac{1}{1+2} \cdot 7^2 \\ \therefore BQ &= 5 \end{aligned}$$

となる。また, メネラウスの定理により,

$$\begin{aligned} \frac{BR}{RQ} \cdot \frac{QA}{AC} \cdot \frac{CP}{PB} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{BR}{RQ} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} &= 1 \\ \therefore \frac{BR}{RQ} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

が得られる。したがって, BR の長さは,

$$\begin{aligned} BR &= \frac{3}{5} \cdot BQ \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $BR = 3$

〔Ⅲ〕

(1)

関数 $f(x) = \sqrt{x+1}$ を x で微分すると,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

となる。また, $g(x) = \log(x+1) - 2\log 2 + 2$ を x で微分すると,

$$g'(x) = \frac{1}{x+1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}, \quad g'(x) = \frac{1}{x+1}$$

(2)

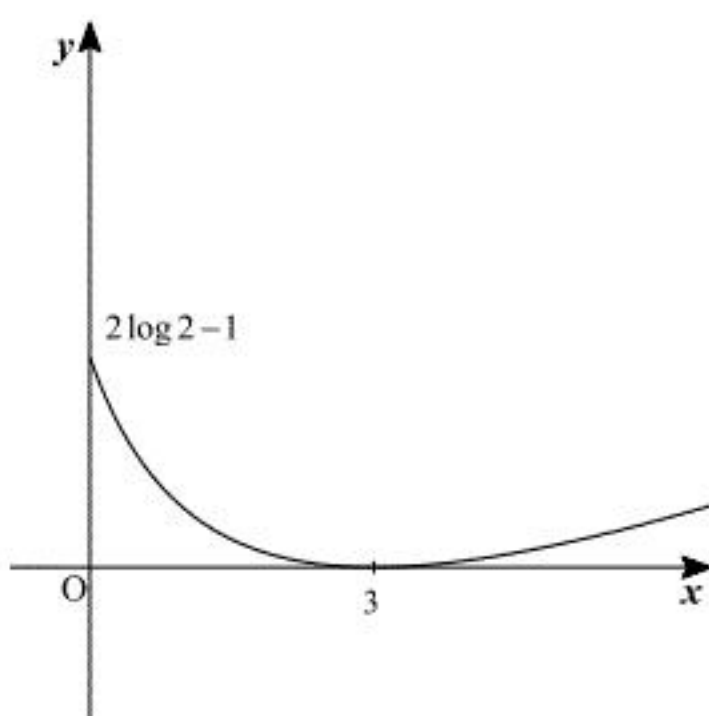
関数 $h(x)$ を $h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。 $h(x)$ を x で微分すると, (1)の結果より,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{\sqrt{x+1} - 2}{2(x+1)} \end{aligned}$$

となる。 $h'(x) = 0$ となる x は $x = 3$ である。したがって, 増減表は以下のようになる。

x	0	...	3	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$	$2\log 2 - 1$	$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって, $y = h(x)$ のグラフは以下のようになる。



(答) 前図

(3)

(2)の結果より, $x \geq 0$ において, $f(x) - g(x) \geq 0$ であり, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は点 $(3, 2)$ のときのみ交点を持つ。したがって, 求める面積は,

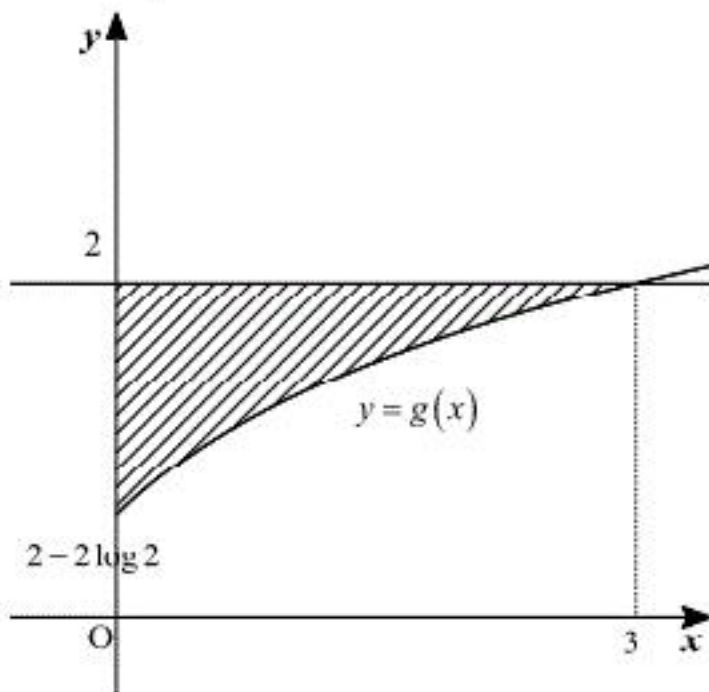
$$\begin{aligned} \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx &= \int_0^3 (\sqrt{x+1} - \log(x+1) + 2\log 2 - 2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \{(x+1)\log(x+1) - (x+1)\} + (2\log 2 - 2)x \right]_0^3 \\ &= \frac{5}{3} - 2\log 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx = \frac{5}{3} - 2\log 2$$

(4)

求める体積は, 下図の斜線部を y 軸周りに回転させたものである。



したがって, 求める体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{2-2\log 2}^2 x^2 dy \\ &= \pi \int_0^3 x^2 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx \end{aligned}$$

とできる。(1)の結果から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1}$$

であるから,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 x^2 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx \\ &= \pi \int_0^3 \frac{x^2}{x+1} dx \\ &= \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{x+1} + x - 1 \right) dx \\ &= \pi \left[\log(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^3 \\ &= \left(2\log 2 + \frac{3}{2} \right) \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \left(2\log 2 + \frac{3}{2} \right) \pi$$

【IV(A)】

- (1) $f(x)=x^2-2ax+a+6$ とおく。 $y=f(x)$ は下に凸の二次関数であるから、 $f(x)=0$ が正の解と負の解をもつ条件は、
$$f(0)<0$$
である。これを計算すると、
$$\begin{aligned} f(0)<0 \\ \Leftrightarrow a+6<0 \\ \therefore a<-6 \end{aligned}$$
となる。

(答) $a<-6$

- (2) $f(x)=0$ が異なる 2 つの負の解をもつ条件は、
 $f(x)=0$ の判別式を D と置いたとき、 $D>0$ ・・・①
 $f(x)=0$ の異なる 2 つの実数解を α, β とおくと、 $\alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$ ・・・②
をとともに満たすことである。まず、①に関しては、
$$\begin{aligned} \frac{D}{4}>0 \\ \Leftrightarrow a^2-a-6>0 \\ \Leftrightarrow (a-3)(a+2)>0 \\ \therefore a<-2, 3<a \end{aligned}$$

となる。また、②について解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2a \\ \alpha\beta=a+6 \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2a<0 \\ a+6>0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow -6<a<0 \end{aligned}$$

が得られる。以上より、求める条件は、

$$-6<a<-2$$

である。

(答) $-6<a<-2$

- (3) $f(x)=0$ の全ての解が1より大きい条件は
 $D\geq 0$ ・・・③
軸 $x=a$ が $x>1$ の範囲にある ・・・④
 $f(1)>0$ ・・・⑤
の 3 つである。まず③については(2)の①の結果より、
$$a\leq -2, 3\leq a$$
となる。また、④については、
$$a>1$$
となる。また、⑤について、 $f(1)=7-a$ であるから、
$$\begin{aligned} 7-a>0 \\ \Leftrightarrow a<7 \end{aligned}$$
が得られる。以上より、求める条件は
$$3\leq a<7$$
となる。

(答) $3\leq a<7$

【IV(B)】

- (1) n の値について 1 つずつ調べる。
[1] $n=2$ のとき
カードを取り除く順番は、
$$2$$
であるから、 $f(2)=1$ となる。
[2] $n=3$ のとき
カードを取り除く順番は、
$$2, 1$$
であるから、 $f(3)=3$ となる。
[3] $n=4$ のとき
カードを取り除く順番は、
$$2, 4, 3$$
であるから、 $f(4)=1$ となる。
[4] $n=5$ のとき
カードを取り除く順番は、
$$2, 4, 1, 5$$
であるから、 $f(5)=3$ となる。
[5] $n=6$ のとき
カードを取り除く順番は、
$$2, 4, 6, 3, 1$$
であるから、 $f(6)=5$ となる。
[6] $n=7$ のとき
カードを取り除く順番は、
$$2, 4, 6, 1, 5, 3$$
であるから、 $f(7)=7$ となる。
[7] $n=8$ のとき
カードを取り除く順番は、
$$2, 4, 6, 8, 3, 7, 5$$
であるから、 $f(8)=1$ となる。
(答) $f(2)=1, f(3)=3, f(4)=1, f(5)=3, f(6)=5, f(7)=7, f(8)=1$

- (2) カードの枚数によって場合分けする。
[1] $2n$ 枚のカードがあるとき
 $2, 4, 6, \dots, 2n$ とカードをまず取り除くとカードは奇数のカードが n 枚残り、3 のカードから取り除いていく操作が再び行われる。ここで、 $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ を 1 番目、2 番目、 $\dots, n$ 番目のカードとみると、2 番目のカードから操作を始めるので、最後に残るカードは $f(n)$ 番目のカードである。このカードの数字は $2f(n)-1$ である。したがって、
$$f(2n)=2f(n)-1$$
が得られる。
[2] $2n+1$ 枚のカードがあるとき
 $2, 4, 6, \dots, 2n, 1$ とカードをまず取り除くとカードは1以外の奇数のカードが n 枚残り、5 のカードから取り除いていく操作が再び行われる。ここで、 $3, 5, 7, \dots, 2n+1$ を 1 番目、2 番目、 $\dots, n$ 番目のカードとみると、2 番目のカードから操作を始めるので、最後に残るカードは $f(n)$ 番目のカードである。このカードの数字は $2f(n)+1$ である。したがって、
$$f(2n+1)=2f(n)+1$$
が得られる。
以上より、題意は示された。

(証明終)

- (3) 自然数 n に対して、 $f(2^n)=1$ が成立することを、数学的帰納法を用いて証明する。
[1] $n=1$ のとき
 $n=1$ を代入すると、
$$f(2)=1$$
となる。したがって、 $n=1$ のときの成立が示された。
[2] $n=k$ のとき
 $f(2^k)=1$ の成立を仮定する。(2)の結果を用いて $n=k+1$ のときを考えると、
$$\begin{aligned} f(2^{k+1})&=f(2\cdot 2^k) \\ &=2f(2^k)-1 \\ &=2\cdot 1-1 \\ &=1 \end{aligned}$$
となる。したがって、 $n=k+1$ のときの成立が示された。
以上、[1], [2]より自然数 n に対して、 $f(2^n)=1$ が成立することが数学的帰納法によって証明された。

(証明終)

- (4) $f(2^n+2^{n-1}+\dots+2+1)=a_n$ とおく。ここで、 a_{n+1} について計算すると、
$$\begin{aligned} a_{n+1}&=f(2^{n+1}+2^n+\dots+2+1) \\ &=f(2(2^n+2^{n-1}+\dots+2+1)+1) \\ &=2f(2^n+2^{n-1}+\dots+2+1)+1 \\ &=2a_n+1 \end{aligned}$$
という漸化式が得られる。ここで a_1 を計算すると、
$$\begin{aligned} a_1&=f(3) \\ &=3 \end{aligned}$$
である。したがって、漸化式を解くと、
$$\begin{aligned} a_{n+1}&=2a_n+1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1}+1&=2(a_n+1) \\ \therefore a_n&=2^{n-1}\cdot 4-1 \end{aligned}$$
となる。したがって、 a_{10} は
$$a_{10}=2047$$
となる。

(答) $a_{10}=2047$