

〔I〕

以下、(1)、(2)において、20枚のカードは、 k を自然数として、

Aグループ… $3k-2$ と表される

Bグループ… $3k-1$ と表される

Cグループ… $3k$ と表される

の3つのグループに分類する。Aグループのカードは7枚、Bグループのカードは7枚、Cグループのカードは6枚となる。

(1)

2枚のカードの整数の和が3の倍数になるのは、AグループとBグループから1枚ずつ取り出す場合か、Cグループから2枚取り出す場合である。したがって、求める確率は、

$$\frac{{}_7C_1 \cdot {}_7C_1 + {}_6C_2}{{}_{20}C_2} = \frac{49+15}{190} \\ = \frac{32}{95}$$

となる。

(答) $\frac{32}{95}$

(2)

20枚のカードの整数の和は3の倍数だから、取り出した17枚のカードの整数の和は3の倍数になるとき、残りの3枚のカードの整数の和は3の倍数となる。したがって、求める確率は、3枚のカードを取り出すときの、取り出したカードの整数の和が3の倍数となる確率に等しい。3枚のカードの整数の和が3の倍数になるのは、3枚を1つのグループから取り出す場合か、各グループから1枚ずつ3枚取り出す場合である。したがって、求める確率は、

$$\frac{({}_7C_3 + {}_7C_3 + {}_6C_3) + ({}_7C_1 \cdot {}_7C_1 \cdot {}_6C_1)}{{}_{20}C_3} = \frac{(35+35+20) + (7 \cdot 7 \cdot 6)}{1140} \\ = \frac{32}{95}$$

となる。

(答) $\frac{32}{95}$

〔Ⅱ〕

(1)

$f(\alpha) = g(\alpha)$ を式変形すると,

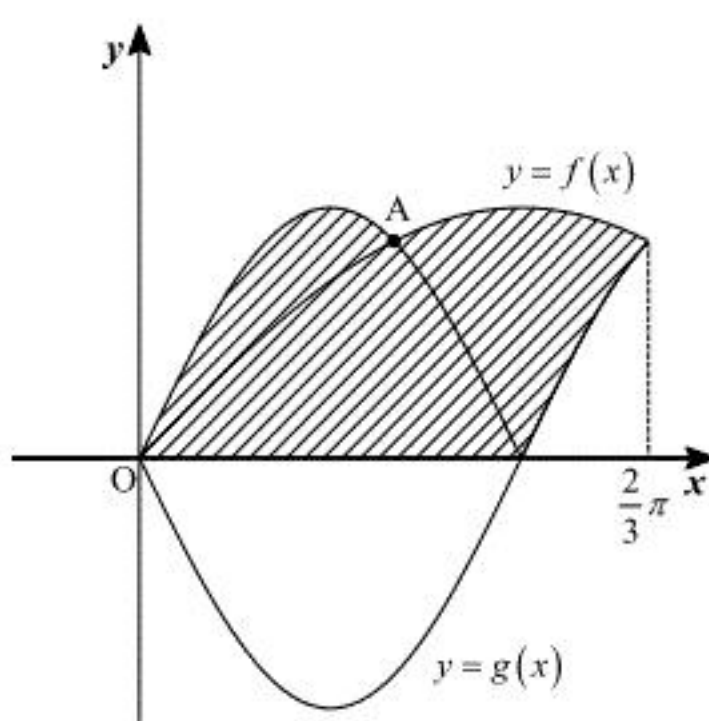
$$\begin{aligned} f(\alpha) &= g(\alpha) \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= -\sin 2\alpha \\ \Leftrightarrow \sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha) &= 0 \\ \therefore \sin \alpha &= 0, \cos \alpha = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $0 < \alpha < \pi$ の範囲であるから、 $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ となる。

(答) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$

(2)

下の図のように、 $y = g(x)$ の $y < 0$ の部分を x 軸に関して折り返し、斜線部を x 軸まわりに回転させてできる立体を考える。求める体積はこの立体の体積に等しい。



$y = g(x)$ の $y < 0$ の部分を x 軸に関して折り返したグラフの $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ の部分は $y = \sin 2x$ である。これと、 $y = f(x)$ の交点 A の x 座標を求める。2 式を連立すると,

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 2x \\ \Leftrightarrow \sin x (1 - 2 \cos x) &= 0 \\ \therefore \sin x &= 0, \cos x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $0 < x < \frac{2}{3}\pi$ だから、 $x = \frac{1}{3}\pi$ となる。したがって、求める体積 V は,

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{3}\pi} (\sin 2x)^2 dx + \pi \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (\sin x)^2 dx - \pi \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (-\sin 2x)^2 dx$$

となる。ここで、各積分を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{3}\pi} (\sin 2x)^2 dx &= \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x \right]_0^{\frac{1}{3}\pi} \\ &= \frac{1}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (\sin x)^2 dx &= \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= \frac{1}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (-\sin 2x)^2 dx &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \sin^2 2x dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x \right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= \frac{1}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

となる。したがって、体積 V は,

$$V = \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$$

となる。

(答) $\frac{1}{4}\pi^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$

〔Ⅲ〕

(1)

$x+y=a$ を $-xy=b$ に代入すると、

$$\begin{aligned} -x(a-x) &= b \\ \Leftrightarrow x^2 - ax - b &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。この方程式が実数解を持てば、 $y=a-x$ だから、 y も実数となる。この方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (-a)^2 - 4(-b) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 4b &\geq 0 \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad a^2 + 4b \geq 0$$

(2)

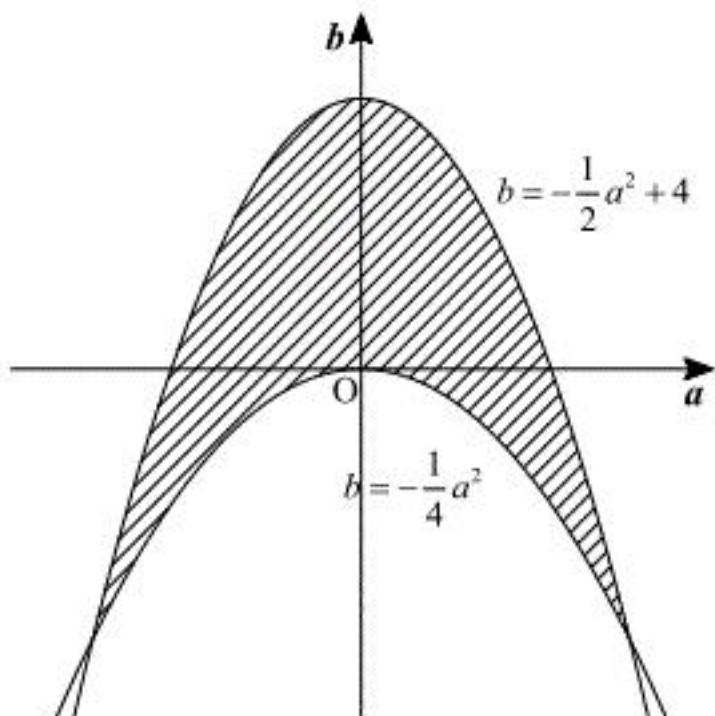
$x^2 + y^2 \leq 8$ の条件を a, b を用いて表すと、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 8 \\ \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy &\leq 8 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2b &\leq 8 \end{aligned}$$

となる。この条件と(1)の結果を合わせると、求める条件は、

$$-\frac{1}{4}a^2 \leq b \leq -\frac{1}{2}a^2 + 4$$

となる。これを図示すると以下のようになる。



$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{4}a^2 \leq b \leq -\frac{1}{2}a^2 + 4, \text{ 前図}$$

(3)

$b = -\frac{1}{2}a^2 + 4$ と $b = -\frac{1}{4}a^2$ の交点を求める。この2式を連立すると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}a^2 + 4 &= -\frac{1}{4}a^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 16 \\ \therefore a &= \pm 4 \end{aligned}$$

が得られる。このとき、 $b = -4$ だから、交点は $(\pm 4, -4)$ となる。したがって、求める面積 S は、

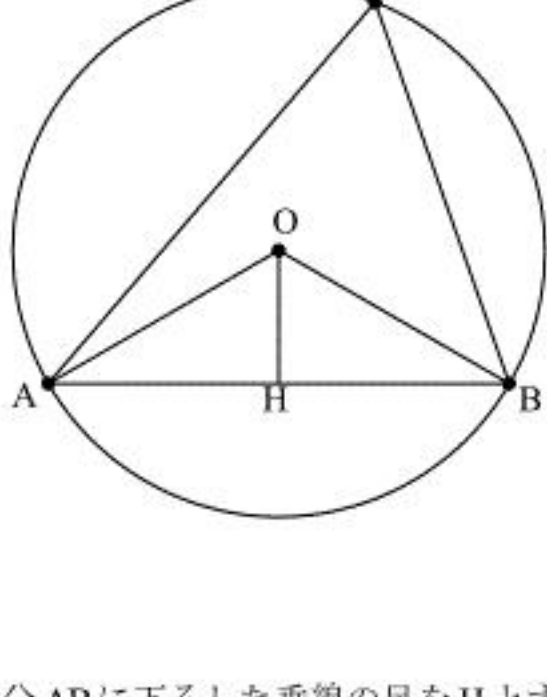
$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^4 \left\{ \left(-\frac{1}{2}a^2 + 4 \right) - \left(-\frac{1}{4}a^2 \right) \right\} da \\ &= 2 \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}a^2 + 4 \right) da \\ &= 2 \left[-\frac{1}{12}a^3 + 4a \right]_0^4 \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{64}{3}$$

【IV(A)】

(1) 題意を図示すると、以下のようになる。



上図のように、点Oから線分ABに下ろした垂線の足をHとする。 $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $OA = a$

であるから、OHの長さは、

$$OH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{1}{2}a$$

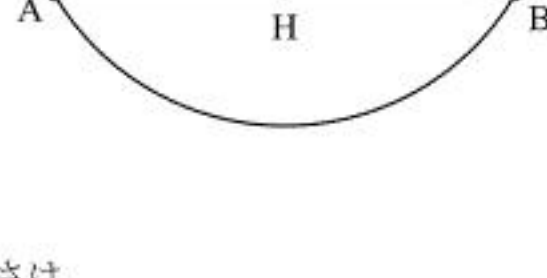
となる。したがって、 $\angle AOH = 60^\circ$ となり、 $\angle AOB = 120^\circ$ となる。中心角と円周角の関係より、

$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB = 60^\circ$$

となる。

(答) 60°

(2) 点Pと線分ABとの距離が最大になるとき、 $\triangle PAB$ の面積は最大となる。点Pと線分ABとの距離が最大になるのは、点Pが下図の位置のときである。



したがって、線分PHの長さは、

$$PH = PO + OH = a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$$

となる。したがって、 $\triangle PAB$ の面積Sは、

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}a \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

となる。そのときの辺PA、辺PBの長さは、

$$PA = PB = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \sqrt{3}a$$

となる。

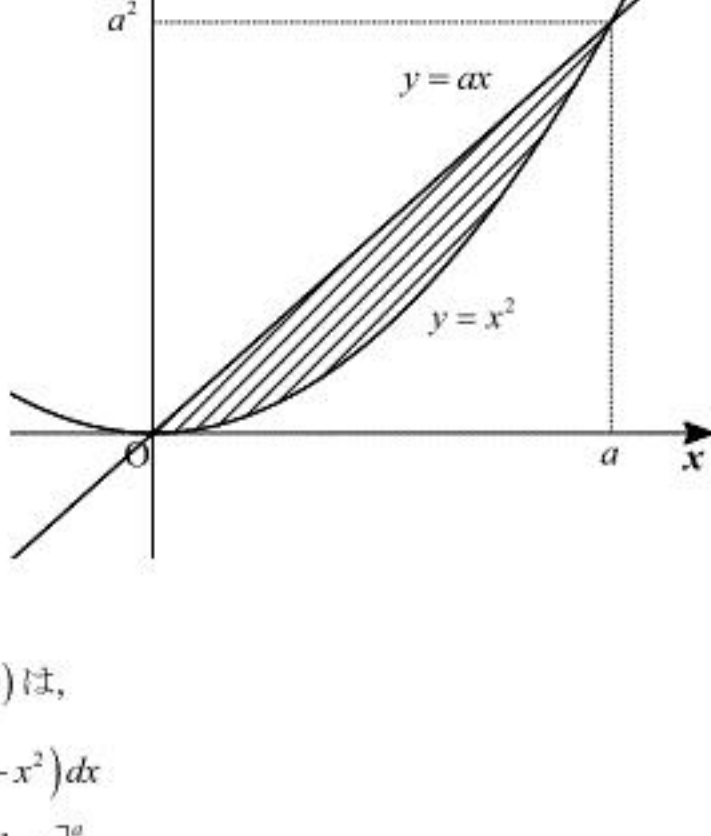
(答) 面積 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, 辺PA、辺PBの長さは $\sqrt{3}a$

【IV(B)】

(1) 直線 ℓ と放物線Cの交点のx座標を求めると、2式を連立すると、

$$\begin{aligned} ax &= x^2 \\ \Leftrightarrow x(x-a) &= 0 \\ \therefore x &= 0, a \end{aligned}$$

となる。したがって、領域Dは以下の図の斜線部になる。ただし、境界を含む。



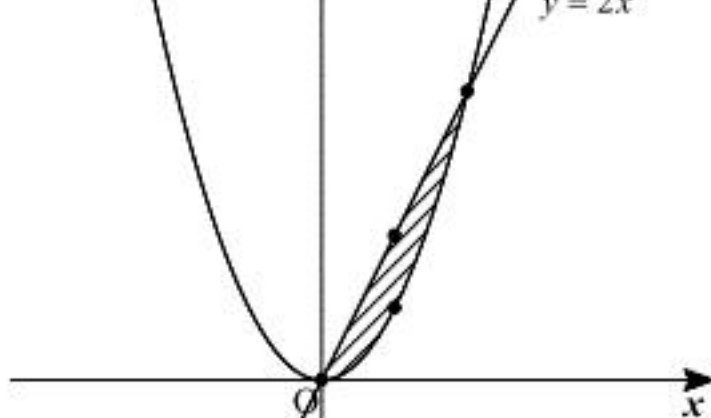
したがって、面積 $S(a)$ は、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a (ax - x^2) dx \\ &= \left[\frac{a}{2}x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{6}a^3 \end{aligned}$$

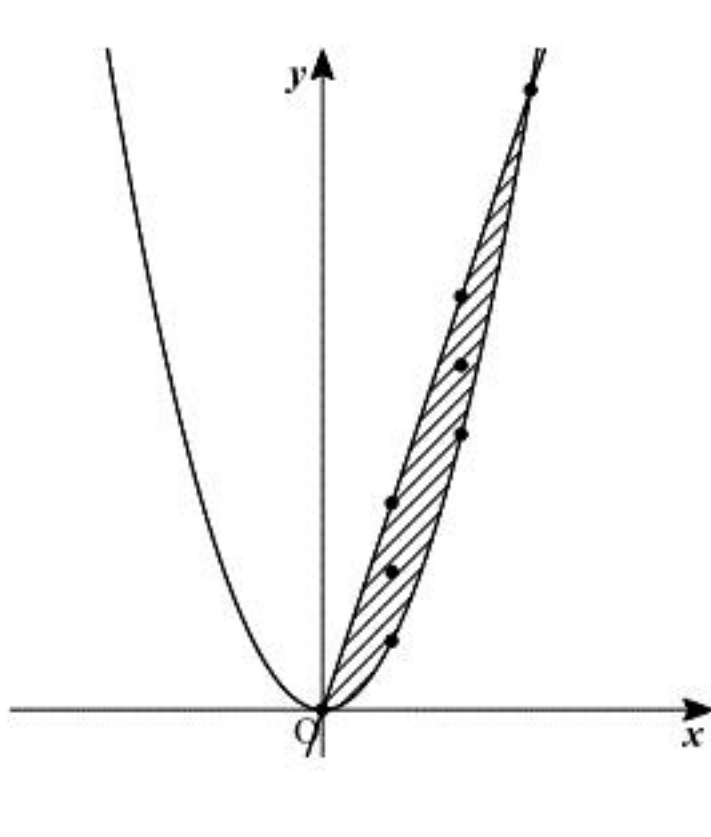
となる。

(答) $\frac{1}{6}a^3$

(2) $N(2)$ のときを具体的に図示すると以下のようになる。



したがって、格子点を数えると $N(2)=4$ となる。次に、 $N(3)$ のときを図示すると、以下のようになる。



したがって、格子点を数えると $N(3)=8$ となる。同様にして $N(4)$ について数えると、 $N(4)=15$ となる。

(答) $N(2)=4, N(3)=8, N(4)=15$

(3) 領域Dに含まれる $x=m$ ($m=0, 1, \dots, k$)上の格子点の数は、

$$km - (m^2 - 1) = km - m^2 + 1 \text{ (個)}$$

となる。したがって、 $N(k)$ は

$$\begin{aligned} N(k) &= \sum_{m=0}^k (km - m^2 + 1) \\ &= k \cdot \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1) \\ &= \frac{1}{6}k^3 + \frac{5}{6}k + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $N(k) = \frac{1}{6}k^3 + \frac{5}{6}k + 1$

(4) $y=kx$ と $y=x^2$ で囲まれた領域を D' とすると、領域 D' は領域Dに含まれるから、

$$N(k) \leq N(a) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。また、(3)の結果より、

$$\begin{aligned} N(k+1) &= \frac{1}{6}(k+1)^3 + \frac{5}{6}(k+1) + 1 \\ &= \left(\frac{1}{6}k^3 + \frac{5}{6}k + 1 \right) + \frac{1}{2}k(k+1) + 1 \\ &= N(k) + \frac{1}{2}k(k+1) + 1 \end{aligned}$$

が成立する。したがって、

$$\left\{ N(k) + \frac{1}{2}k(k+1) \right\} - N(a) = N(k+1) - N(a) - 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 $y=(k+1)x$ と $y=x^2$ で囲まれた領域を D'' とすると、領域 D'' には、 $y=(k+1)x$ 上の格子点が含まれるが、領域Dには含まれないから、

$$N(a) + (k+1) \leq N(k+1) \quad \dots \textcircled{3}$$

が成立する。②と③より、

$$N(k+1) - N(a) - 1 \geq (k+1) - 1$$

$$\Leftrightarrow N(k+1) - N(a) - 1 \geq k$$

$$\therefore \left\{ N(k) + \frac{1}{2}k(k+1) \right\} - N(a) > 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。以上より、①と④から、

$$N(k) \leq N(a) < N(k) + \frac{1}{2}k(k+1)$$

が得られる。したがって、題意は示された。

(証明終)

(5) (4)の不等式を、全辺 $S(a)$ で割ると、 $S(a) > 0$ であるから、

$$\frac{N(k)}{S(a)} \leq \frac{N(a)}{S(a)} < \frac{N(k) + \frac{1}{2}k(k+1)}{S(a)}$$

となる。また、 $k \leq a < k+1$ であるから、(1)の式より、

$$S(k) \leq S(a) < S(k+1)$$

だから、

$$\frac{N(k)}{S(k+1)} \leq \frac{N(a)}{S(a)} < \frac{N(k) + \frac{1}{2}k(k+1)}{S(k)}$$

となる。(1)と(3)の結果を用いて右辺の $k \rightarrow \infty$ の極限值を考えると、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(k) + \frac{1}{2}k(k+1)}{S(k)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}k^3 + \frac{5}{6}k + 1 + \frac{1}{2}k(k+1)}{\frac{1}{6}k^3} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2k} \cdot 1 \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{6}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

となる。同様に左辺の極限值を考えると、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(k)}{S(k+1)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}k^3 + \frac{5}{6}k + 1}{\frac{1}{6}(k+1)^3} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3}}{\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^3} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{6}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

となる。また、 $a-1 < k \leq a$ だから、 $a \rightarrow \infty$ のとき、 $k \rightarrow \infty$ となる。したがって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(a)}{S(a)} = 1$$

となる。

(答) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(a)}{S(a)} = 1$