

平成 20 年度入学者選抜学力検査問題(前期日程)

数 学

I ・ II ・ III ・ A ・ B ・ C

(注 意)

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は 5 ページ，解答用紙は 4 枚である。
指示があってから確認すること。
3. 解答はすべて解答用紙の指定のところに記入すること。
解答用紙の表面だけで書ききれない場合は，裏面の下半分
を使用することができる。
4. 問題Ⅳについては，次の点に注意して解答すること。
工学部および農学部出願者は，〔Ⅳ(A)〕を解答すること。
医学部医学科出願者は，〔Ⅳ(B)〕を解答すること。
5. 解答用紙は持ち帰ってはならないが，問題冊子は必ず持ち
帰ること。

〔Ⅰ〕 1 から 20 までの整数が 1 つずつ書かれた 20 枚のカードがある。次の問いに答えよ。

- (1) 2 枚のカードを同時に取り出すとき、取り出した 2 枚のカードの整数の和が 3 の倍数になる確率を求めよ。
- (2) 17 枚のカードを同時に取り出すとき、取り出した 17 枚のカードの整数の和が 3 の倍数になる確率を求めよ。

〔Ⅱ〕 関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = -\sin 2x$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(a) = g(a)$ を満たす a を $0 < a < \pi$ の範囲で求めよ。
- (2) a を前問(1)で求めたものとするとき、曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ ($0 \leq x \leq a$) とで囲まれた図形を x 軸のまわりに一回転させてできる立体の体積を求めよ。

〔Ⅲ〕 実数の定数 a, b に対して、連立方程式

$$x + y = a, \quad -xy = b \quad (*)$$

を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 連立方程式(*)が実数解をもつとき、定数 a, b の満たす条件を求めよ。
- (2) 連立方程式(*)が実数解 (x, y) をもち、かつ、それが $x^2 + y^2 \leq 8$ の範囲にあるとき、定数 a, b の満たす条件を求め、点 (a, b) 全体のなす領域 D を図示せよ。
- (3) 前問(2)の領域 D の面積を求めよ。

この問題は、工学部および農学部出願者のためのものである。
医学部医学科出願者は、この問題に答える必要はない。

[Ⅳ(A)] 点 O を中心とする半径 a の円 C の周上に、相異なる 3 点 A , B , P がある。弦 AB の長さを $\sqrt{3}a$ とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$ とする。

- (1) 点 P が直線 AB に関して点 O と同じ側にあるとき、 $\angle APB$ の大きさを求めよ。
- (2) 点 P が円 C の周上を動くとき、 $\triangle PAB$ の面積の最大値、および、そのときの辺 PA , PB の長さを a を用いて表せ。

この問題は、医学部医学科出願者のためのものである。

工学部および農学部出願者は、この問題に答える必要はない。

〔Ⅳ(B)〕 座標平面上に、直線 $\ell: y = ax (a > 0)$ と放物線 $C: y = x^2$ がある。 ℓ と C とで囲まれた領域を D とする。ただし、 D は境界を含む。領域 D に含まれ、かつ、 x, y ともに整数である点 (x, y) の個数を $N(a)$ で表すとき、次の問いに答えよ。

- (1) 領域 D の面積 $S(a)$ を a の式で表せ。
- (2) $N(2), N(3), N(4)$ を求めよ。
- (3) k が正の整数のとき、 $N(k)$ を k の式で表せ。
- (4) 1 以上の実数 a に対して、 $k \leq a < k + 1$ を満たす整数 k をとるとき、
$$N(k) \leq N(a) < N(k) + \frac{k(k+1)}{2}$$
 が成り立つことを示せ。
- (5) 前問(1)で求めた $S(a)$ に対して、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{N(a)}{S(a)}$ を求めよ。