

[I]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \left(2^{\frac{4}{3}} \times 2^{-1} \right)^6 \times \left\{ \left(\frac{16}{81} \right)^{-\frac{7}{6}} \right\}^{\frac{3}{7}} &= \left(2^{\frac{1}{3}} \right)^6 \times \left(\frac{16}{81} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 2^2 \times \frac{9}{4} \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

(答) 9

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right) \left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right) (x + y) &= (x - y)(x + y) \\
 &= x^2 - y^2
 \end{aligned}$$

(答) $x^2 - y^2$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad 4 \log_4 \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log_4 \frac{1}{8} - \frac{3}{2} \log_4 8 &= 2 \log_4 2 - \frac{3}{2} \log_4 2 - \frac{9}{2} \log_4 2 \\
 &= -4 \log_4 2 \\
 &= -4 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 4} \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

(答) -2

〔Ⅱ〕

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\cos^2 2x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \\
 &= -(1 - \sin^2 2x) - \sqrt{3} \sin 2x + 2 \\
 &= \sin^2 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 1
 \end{aligned}$$

である。ここで $\sin 2x = t$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= t^2 - \sqrt{3} t + 1 \\
 &= \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

となり、また、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $0 \leq 2x \leq \pi$ だから、 t の変域は $0 \leq t \leq 1$ である。

よって $f(x)$ は

$t = 0$ つまり $x = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき **最大値** 1 をとり、

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ つまり $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ のとき **最小値** $\frac{1}{4}$ をとる。

(答) $x = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき **最大値** 1

$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ のとき **最小値** $\frac{1}{4}$

〔Ⅲ〕

- (1) 第 $n+1$ 番目の正六角形の最も外側の一边には n 個の基石が並ぶので

$$h_{n+1} = h_n + 6n$$

が成り立つ。

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} h_n &= h_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6k \\ &= 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) \\ &= 3n^2 - 3n + 1 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$n=1$ のとき, $3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1$ となり, $(*)$ は $n \geq 1$ で成り立つ。

$$(\text{答}) h_n = 3n^2 - 3n + 1$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{k=1}^n h_k &= \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \\ &= n^3 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) n^3$$